단국대학교 2020학년도 모의논술고사

자연계열 가이드답안

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 중복조합을 이해하고 그 조합의 수를 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 중복조합의 응용문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 중복조합의 개념을 파악하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 확률과 통계, 32-33, 신항균 외, 지학사 (2019)
○ 확률과 통계, 41-43, 정상권 외, 금성출판사 (2018)
○ 확률과 통계, 41-43, 신항균 외, 교학사 (2018)

[논제 1 평가기준]

- 사업의 경우의 수를 제시: 2점
- 모든 가능한 경우의 수를 제시: 10점 (각 경우마다 2점씩)
- 정답을 제시: 3점

[논제 2 평가기준]

- $n(k)$을 제시: 18점 (각 $n(k)$값마다 2점씩)
- 정답을 제시: 2점

[논제 3 평가기준]

- 구하는 값이 $\sum_{i=1}^{6} z_i \leq 20$의 양의 정수해의 개수와 같음을 제시: 5점
- 구하는 값이 $\sum_{i=1}^{7} z_i = 21$의 양의 정수해의 개수와도 같음을 설명: 5점
- 정답을 제시: 10점

□ 예시 답안

본 예시 답안은 <제시문>-(다)를 이용하여 답안을 작성하는 방법을 소개한다.

[논제 1] i번째 사업 $(i=1,2,3,4)$에 투자할 금액을 x_i라고 하면, 주어진 조건에서

$$x_1+x_2+x_3+x_4=20,\quad x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3,\ x_4 \geq 4 \text{ (단위:억)}$$

이다. 적어도 3가지 사업에 투자해야 할 경우는

선택된 사업	투자금액	가능한 방법의 수
1,2,3	x_1, x_2, x_3	${}_3\mathrm{H}_{13} = {}_{15}\mathrm{C}_2 = 105$
1,2,4	x_1, x_2, x_4	${}_3\mathrm{H}_{12} = {}_{14}\mathrm{C}_2 = 91$
1,3,4	x_1, x_3, x_4	${}_3\mathrm{H}_{11} = {}_{13}\mathrm{C}_2 = 78$
2,3,4	x_2, x_3, x_4	${}_3\mathrm{H}_{11} = {}_{13}\mathrm{C}_2 = 78$
1,2,3,4	x_1, x_2, x_3, x_4	${}_4\mathrm{H}_9 = {}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$

이다. 따라서 모든 방법의 수는 572 이다.

[논제 2] 최소투자금액을 고려하여 $z_1 = x_1 - 1,\ z_2 = x_2 - 1,\ z_3 = x_3 - 1,\ z_4 = x_4 - 1$ 이라 하면, 방정식

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 16,\ z_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4$$

의 음이 아닌 정수해를 구하는 것과 같다.

먼저 $k=1$인 경우를 생각해보자. 2가지 사업의 투자금액이 1억이라는 것은 z_1, z_2, z_3, z_4 중에서 0이 2개 있다는 것을 의미한다. 0을 2개 정하는 경우는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$개 있으므로 만일 $z_1 = z_2 = 0$일 때, $z_3 + z_4 = 16$을 만족하는 음이 아닌 정수 z_3, z_4의 개수는 ${}_{17}\mathrm{C}_1 = 17$개 있다. 그런데 $(z_3, z_4) = (0, 16)$과 $(z_3, z_4) = (16, 0)$은 투자금액이 1억인 사업이 3개가 되는 경우가 되므로 $n(1) = 6 \times (17 - 2) = 90$이다.
이와 같은 방법으로 $n(k),\ k = 2, 3, \cdots, 9$를 구하면 다음과 같다.

k	$n(k)$
1	$6 \times (17-2) = 90$
2	$6 \times (15-2) = 78$
3	$6 \times (13-2) = 66$
4	$6 \times (11-2) = 54$
5	$6 \times (9-1) = 48$
6	$6 \times (7-2) = 30$
7	$6 \times (5-0) = 30$
8	$6 \times (3-0) = 18$
9	$6 \times (1-0) = 6$

결국 $\sum_{k=1}^{9} n(k) = 420$ 이다.

[논제 3] ${}_6\mathrm{H}_{20-6}$는 방정식 $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 14$ 의 음이 아닌 정수해의 개수이고, 마찬가지로 ${}_6\mathrm{H}_{20-k}$ $(k = 7, 8, \cdots, 20)$ 는 방정식 $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 20 - k$ 의 음이 아닌 정수해의 개수이므로 $\sum_{k=6}^{20} {}_6\mathrm{H}_{20-k}$ 는 부등식 $\sum_{i=1}^{6} z_i \leq 14$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다. 이것은 (새로운 변수 z_7을 사용하여) 방정식 $\sum_{i=1}^{7} z_i = 14$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와도 같다. 따라서 $\sum_{k=6}^{20} {}_6\mathrm{H}_{20-k} = {}_7\mathrm{H}_{14} = {}_{20}\mathrm{C}_{14}$ 이므로 $a = 20$이다.

<별해> $\sum_{k=6}^{20} {}_6\mathrm{H}_{20-k} = {}_6\mathrm{H}_0 + {}_6\mathrm{H}_1 + \cdots + {}_6\mathrm{H}_{14}$ 는 서로 다른 6개에서 중복을 허용하여 0개 또는 1개 또는 이런 방법으로 14개까지 택하는 경우의 수이므로, 이것은 (하나가 더 있는) 7개에서 14개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 따라서 $\sum_{k=6}^{20} {}_6\mathrm{H}_{20-k} = {}_7\mathrm{H}_{14}$ 이다. 그러므로 $a = 20$이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

☐ 출제의도

[논제 1] 도함수를 이용하여 함수의 증감 상태를 파악할 수 있는지를 평가

[논제 2] 역함수의 개념을 이용하여 정적분 문제를 해결할 수 있는지를 평가

☐ 자료출처

○ 미적분 I, 104-107, 김원경 외, 비상교육 (2018)
○ 미적분 II, 165-180, 류희찬 외, 천재교과서 (2019)
○ 미적분 II, 132-149, 김원경 외, 비상교육 (2018)

[논제 1 평가기준]
- $g'(x) \geq 0$ 인 조건을 제시: 6점
- $-f(x)x+2F(x)$ 가 감소함을 제시: 6점
- $-f'(x)x+f(x)<0$ 임을 제시: 6점
- a의 최댓값이 $\int_0^2 f(x)dx - f(2)$ 임을 설명: 7점

[논제 2 평가기준]
- $h(x)=e^x - \ln(e^x+1)+F(x)-2$를 제시: 8점
- $\int_0^2 e^t\{(F\circ k)(t)+e^{k(t)}-\ln(e^{k(t)}+1)\}dt = \int_0^2 e^t(t+2)dt$ 를 제시: 7점
- 정답을 제시: 5점

☐ 예시 답안

[논제 1] $g(x)$가 구간 $(1,2)$에서 증가하려면 $g'(x)\geq 0$이어야 한다. 함수 $g(x)$는

$$g'(x)=\frac{-f(x)x^2-2(a-F(x))x}{x^4}=\frac{-f(x)x-2a+2F(x)}{x^3}$$

이므로 $g'(x)\geq 0$ 이려면

$$-f(x)x+2F(x)\geq 2a \qquad \text{(A)}$$

이어야 한다. $G(x)=-f(x)x+2F(x)$라 하자. 조건 (3)으로부터

$$G'(x)=-f'(x)x+f(x)$$

이고

$$G''(x)=-f''(x)x<0$$

이다. 따라서 $G'(x)$는 구간 $(1,2)$에서 감소한다. 조건 (1)로부터

$$G'(1) = -f'(1) + f(1) \le 0$$

이므로 $1 < x < 2$에서 $G'(x) < 0$이다. 따라서 연속함수 $G(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 감소한다.
구간 $[1, 2]$에서 $G(x)$의 최솟값은

$$G(2) = -2f(2) + 2F(2)$$

이므로 (A)로부터

(i) $a \le F(2) - f(2)$ 이면 $1 < x < 2$에서 $g'(x) > 0$이므로 $g(x)$는 증가한다.

(ii) $a > F(2) - f(2)$ 이면 $g'(2) < 0$이므로 $g(x)$는 증가하지 않는다.

결국 a의 최댓값은 $F(2) - f(2)$이다.

[논제 2] $h'(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} + f(x)$을 적분하면 $h(0) = -1 - \ln 2$이므로

$$h(x) = e^x - \ln(e^x + 1) + F(x) - 2$$

이다. 따라서

$$x = h(k(x)) = e^{k(x)} - \ln(e^{k(x)} + 1) + F(k(x)) - 2$$

이므로

$$\int_0^2 e^t \{(F \circ k)(t) + e^{k(t)} - \ln(e^{k(t)} + 1)\} dt = \int_0^2 e^t (t + 2) dt = 3e^2 - 1$$

이다.