단국대학교 2024학년도 편입학 모집 필기고사

자연계열(오전)
수학 가이드답안

단국대학교
DANKOOK UNIVERSITY

수학 가이드 답안지 [자연계열] <오전> (문항별 5점)

31. 점 $(3,4)$에서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$. 즉, $3x+4y=25$.

32. $f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$이므로 임계수에서 f의 값은 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{23}{27}$, $f(1)=-1$. 구간의 양 끝점에서 $f(-1)=-5$, $f(2)=1$이므로, (최댓값)+(최솟값)$=a+b=-4$.

33. $10=\int_{-1}^{3}(x-a|x|)dx=\int_{-1}^{0}(a+1)xdx+\int_{0}^{3}(1-a)xdx=-5a+4$에서 $a=-\frac{6}{5}$.

34. 닫힌구간 $[0,2\pi]$에서 $y=\sin\frac{x}{2}$와 $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$. 구하는 영역의 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x-\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos x\right)dx+\int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi}\left(\cos x-\sin\frac{x}{2}\right)dx = -2+3\sqrt{3}$$

35. $\sum_{n=1}^{\infty}k^{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}k^{\ln\frac{1}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\ln k}$ 이므로 $p-$급수판정법에 의해서 $\ln k>1$. 따라서 k의 최솟값은 3.

36. 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{4}$.

37. 구하는 벡터는 각 평면의 법선벡터와 수직이므로 $\langle 1,-2,1\rangle\times\langle 2,3,-2\rangle=\langle 1,4,7\rangle$.

38. $\langle a,b\rangle=\nabla f(1,2)=\langle 4,4\rangle$이므로 $\frac{b}{a}=1$.

39. 영역 E의 zx-평면으로의 정사영을 D라고 하면

$$\frac{128\pi}{15}=\iint_D\int_{x^2+z^2}^{a}\sqrt{x^2+z^2}\,dy\,dA=\iint_D(a-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a}}r^2(a-r^2)\,dr\,d\theta=\frac{4\pi}{15}a^{\frac{5}{2}}$$

이므로 $a=4$.

40. $\nabla f=\langle -3x^2+4y,4x-4y\rangle=\langle 0,0\rangle$에서 임계점은 $(0,0)$ 또는 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$. $D(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=24x-16$에서 $D(0,0)=-16<0$이므로 $f(0,0)$은 극값이 아니고, $D\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=16>0$이므로 $f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{59}{27}$에서 $a+b+c=\frac{131}{27}$.

41. $0=g'(0)=(\nabla f)(\mathrm{r}(0))\cdot\mathrm{r}'(0)=\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}$ 이므로 u와 v는 서로 수직. 피타고라스 정리에 의해서 $|\mathrm{u}-\mathrm{v}|=2$.

42. $\iint_{S^2}\ln(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dS=\ln 2\iint_{S^2}1\,dS=4\pi\ln 2$.

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

43. 곡선 C를 포함하는 평면에서 C와 그 내부를 S, S의 xy평면으로의 정사영을 R라 하자. Stokes 정리에 의하여 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\mathrm{curl}\,\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_R (-\mathbf{i}-\mathbf{j}+2y\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dA = \int_0^3 \int_0^{3-y} (2y-4)\,dx\,dy = -9.$

44. $0 = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z = -3 + c$ 에서 $c = 3.$

45. ㉠ 특성방정식 $(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$에서 고윳값은 모두 양의 실수. (참)
㉡ 행렬 $B = A^6$의 고윳값은 $2^6 = 64,\ 1^6 = 1.$ (참)
㉢ 고윳값 2에 대한 고유공간이 2차원이므로 A는 대각화가능. (참)
㉣ A가 대칭행렬이 아니므로 직교대각화가능하지 않음. (참)

46. 변환 T는 x축 방향으로 3배, y축 방향으로 2배 확대한 후, $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하는 변환과 같으므로
$T(\langle 1,0 \rangle) = 3\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$이고 $T(\langle 0,1 \rangle) = 2\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$이다.
$T\left(\left\langle \frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right\rangle\right) = T\left(\frac{1}{3}\langle 1,0 \rangle + \frac{2\sqrt{2}}{3}\langle 0,1 \rangle\right) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{3} \right\rangle = \langle a,b \rangle$에서 $a+b = \sqrt{2}.$

47. $\mathbf{u}_1 = \langle a,b,c \rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 3,1,2 \rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 0,-1,1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle x,y,z \rangle$라 하면, $3 = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3)$
$= \mathbf{u}_1 \cdot (3\langle 1,-1,-1 \rangle)$. 또한 $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v} = 0$ 에서 $\mathbf{v} = k\langle 1,-1,-1 \rangle$($k$는 상수). 따라서
$3 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u}_1 \cdot \langle 1,-1,-1 \rangle) = k$이므로 $x_0 = 3$, $y_0 = z_0 = -3$. 그러므로 $3x_0 + y_0 + z_0 = 3.$

48. 양변에 적분인자 $e^{\int \tan x\,dx} = \sec x$를 곱하면 $\frac{d}{dx}[(\sec x)y] = \cos x$ 이므로 $y = \sin x \cos x + C\cos x$ (C는 상수). 또한 $y(0) = -1$에서 $C = -1$ 이므로 $y(x) = \sin x \cos x - \cos x$이고, 구하는 값은 $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$

49. 코시-오일러 방정식의 특성방정식 $(m-2)^2 = 0$으로부터 일반해는 $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x$ (C_1, C_2는 상수).
초기조건으로부터 $y(x) = 5x^2 - 7x^2\ln x$, $y'(x) = 3x - 14x\ln x$이므로 $y(2) - y'(2) = 14.$

50. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{3}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right).$