단국대학교 2024학년도 편입학 모집 필기고사

# 자연계열(오후)
# 수학 가이드답안

단국대학교
DANKOOK UNIVERSITY

# 수학 가이드 답안지 [자연계열] < 오후 > (문항별 5점)

31. $3x^2+3y^2y'=6y+6xy'$에서 $y'=\dfrac{2y-x^2}{y^2-2x}$. 따라서 점 $(3,3)$에서 $y'=-1$이므로 구하는 방정식은 $x+y=6$.

32. $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$이므로 임계수에서 $f$의 값은 $f(0)=-4$, $f(-2)=0$. 구간의 양 끝점에서 $f(-3)=-4$, $f(2)=16$이므로, (최댓값)+(최솟값)$=a+b=12$.

33. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\ dx = \Big[-f(x)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\, dx = e-1.$

34. 주어진 입체의 부피는 $\dfrac{8\pi}{15}=\pi\displaystyle\int_0^1[(a-x^2)^2-(a-x)^2]\,dx=\pi\left(\frac{5a-2}{15}\right)$에서 $a=2$.

35. ㉠ 수열 $\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$은 감소수열이고 극한값은 $0$이므로 교대급수판정법에 의하여 (수렴).

㉡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$이 수렴($p-$급수판정법)하고, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$이므로 (수렴).

㉢ $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{t\to\infty}\Big[\ln|\ln x|\Big]_2^t=\infty$이므로 적분판정법에 의해 (발산).

㉣ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n2^n}{4n^3+1}\neq 0$이므로 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{4n^3+1}$은 (발산).

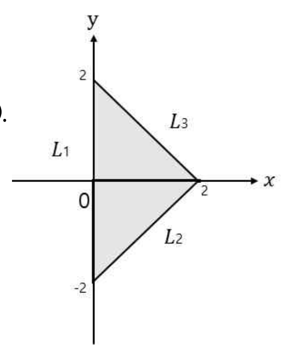
36. (곡선의 길이) $=\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\sqrt{5}}\theta\sqrt{\theta^2+4}\ d\theta=\frac{19}{3}.$

37. 세 점을 지나는 평면의 법선 벡터는 $\langle 1,-2,1\rangle\times\langle 2,-1,3\rangle=\langle -5,-1,3\rangle$이므로 평면의 방정식은 $5x+y-3z=9$이고 직선의 방정식은 $x=-5t-2$, $y=-t+1$, $z=3t$ ($t$는 실수). $t=-\dfrac{18}{35}$일 때 만나므로 교점은 $\left(\dfrac{20}{35},\dfrac{53}{35},-\dfrac{54}{35}\right)$. 따라서 $a+b+c=\dfrac{19}{35}$.

38. $\nabla f(x,y,z)=2x\mathrm{i}+2y\mathrm{j}-4\mathrm{k}$이므로 점 $(2,-1,1)$에서 가장 빨리 증가하는 방향은 $\nabla f(2,-1,1)=4\mathrm{i}-2\mathrm{j}-4\mathrm{k}$의 방향이고 최대변화율은 $|\nabla f(2,-1,1)|=6$이므로 $\dfrac{cd}{a+b}=-12$.

39. $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}\,dy\,dx=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\ dx=\frac{2}{9}((\sqrt{2})^3-1)$이므로 $a=\sqrt{2}$.

40. $\nabla f=\langle 2x-2,2y\rangle=\langle 0,0\rangle$에서 $(1,0)$은 임계점이고,
$D(1,0)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\big|_{(x,y)=(1,0)}>0$, $f_{xx}(1,0)>0$이므로 $f(1,0)=-1$은 극솟값. ($a=1$).




(1) $L_1$ 에서 $0\le f(0,y)=y^2\le 4$

(2) $L_2$ 에서 $-\dfrac{1}{2}\le f(x,x-2)=2x^2-6x+4\le 4$

(3) $L_3$ 에서 $-\dfrac{1}{2}\le f(x,-x+2)=2x^2-6x+4\le 4$

이므로 최댓값은 $f(0,2)=f(0,-2)=4$, 최솟값은 $f(1,0)=-1$. ($b=5$). 따라서 $a+b=6$.

41. $u=xy$, $v=\dfrac{y}{x}$ 라 치환하면 영역 $R$은 영역 $W=\left\{(u,v)\,\middle|\, 1\le u\le 4,\ \dfrac{1}{4}\le v\le 2\right\}$로 변환되고

$$\iint_R e^{-\frac{xy}{2}}\,dxdy=\iint_W e^{-\frac{u}{2}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\int_{\frac{1}{4}}^{2}\int_1^4 e^{-\frac{u}{2}}\frac{1}{2v}dudv=(e^{-1/2}-e^{-2})\ln 8$$

42. 평면의 방정식은 $z=a-x-y$ 이므로, $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\iint_T x\,dS=\int_0^a\int_0^{a-u}u\,(\sqrt{3})\,dv\,du=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ 에서 $a=2$.

43. 곡선 $C$와 그 내부의 영역을 $D$라 하면, 그린 정리에 의하여,

$$\int_C \mathrm{F}\cdot d\mathrm{r}=\iint_D 2x\,dA=\int_0^1\int_0^{e^{x^2}}2x\,dydx=\int_0^1 2xe^{x^2}dx=e-1$$

44. 곡면 $S$와 그 내부영역을 $E$라 하자. 발산 정리에 의하여

$$\iint_S \mathrm{F}\cdot d\mathrm{S}=\iiint_E \mathrm{div}\mathrm{F}\,dV=\iiint_E(x^2+y^2)dV=\int_{-1}^1\left(\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy\right)dz$$

$$=2\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3drd\theta=\pi$$

45. $\mathrm{rank}(A-I)+\mathrm{nullity}(A-I)=5$ 이므로 $\mathrm{nullity}(A-I)=1$. $A$가 대각화가능하고 고윳값이 $1$과 $2$이므로 $\mathrm{nullity}(A-I)+\mathrm{nullity}(A-2I)=5$. 따라서 $\mathrm{rank}(A-2I)=1$.

46. $\langle 9,m\rangle=T(\langle k,-3,5\rangle)=T(5\langle 1,1,1\rangle-8\langle 1,1,0\rangle+(k+3)\langle 1,0,0\rangle)$

$$=\langle 5,0\rangle-\langle 16,-8\rangle+\langle 4(k+3),3(k+3)\rangle=\langle 4k+1,\ 3k+17\rangle$$

이므로 $k=2$, $m=23$. 따라서 $k+m=25$.

47. $W_1$과 $W_2$는 덧셈에 대하여 닫혀 있지 않으므로 부분공간이 아니다. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in W_3$ 이면 $\mathrm{tr}(A^TA)=a^2+b^2+c^2+d^2=0$이므로 $a=b=c=d=0$. 따라서 $W_3=\{O\}$는 자명한 부분공간. $O\in W_4$ 이고, $A,B\in W_4$과 $k\in\mathbb{R}$ 에 대하여 $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$이고 $(kA)^T=kA^T=kA$이므로 $W_4$는 부분공간.

48. 주어진 방정식은 $y'+\left(1+\dfrac{2}{x}\right)y=\left(\dfrac{2}{x}\right)e^{-x}$이므로 적분인자 $e^{\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx}=x^2e^x$을 곱하면 $\dfrac{d}{dx}[x^2e^xy]=2x$. 따라서 $y=e^{-x}+\dfrac{C}{x^2}e^{-x}$ ($C$는 상수)이고, $y(1)=0$에서 $y(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{x^2}e^{-x}$이므로 $y(2)=\dfrac{3}{4e^2}$.

49. 코시-오일러 방정식의 특성방정식 $m^2+1=0$으로부터 일반해는 $y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)$ ($C_1$, $C_2$는 상수). 초기조건에서 $y(x)=\cos(\ln x)+2\sin(\ln x)$, $y'(x)=\dfrac{1}{x}(2\cos(\ln x)-\sin(\ln x))$이므로 $y(2)-y'(2)=\dfrac{5}{2}\sin(\ln 2)$.

50. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)(s+2)}\right\}=\dfrac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}+\dfrac{2}{s^2+4}-\dfrac{1}{s+2}\right\}=\dfrac{1}{4}(\cos 2t+\sin 2t-e^{-2t})$.