단국대학교 2023학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오후)

DKU
단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 함수의 극값의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 최대-최소 개념을 이해하고 응용할 수 있는지를 평가

[논제 3] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김원경 외(2018), 수학 I, 비상, 127-133쪽
○ 고성은 외(2019), 미적분, 좋은책신사고, 150-152쪽
○ 홍성복 외(2019), 미적분, 지학사, 111-124쪽

□ 문항해설

[논제 1] 극값의 개념을 밑변의 길이가 같을 때 높이가 높을수록 삼각형의 넓이가 커진다는 사실에 접목하여 이용할 수 있는지를 측정하는 문제

[논제 2] [논제 1]을 확장해서 주어진 영역에 속한 삼각형의 넓이의 최댓값을 구하는 문제

[논제 3] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해해서 급수의 합을 적분으로 바꾸어 풀 수 있는지를 측정하는 문제

□ 채점기준

[논제 1 평가기준]

- 선분 $\overline{\mathrm{AB_2}}$의 기울기와 접선의 기울기가 일치할 때 점 $\mathrm{B_3}$는 가장 멀리 있음을 제시 : 8점
- $a_2 = -\dfrac{1}{9}$임을 제시 : 3점
- 정답을 제시 : 4점

[논제 2 평가기준]
- $3(3a_n-1)=f'(a_{n+1})$을 제시 : 7점
- 세 꼭짓점이 A, $(0,g(0))$, $(0,f(0))$일 때 삼각형의 넓이가 가장 큼을 제시 : 7점
- 정답을 제시 : 6점

[논제 3 평가기준]
- $b_n=-\dfrac{1}{\ln 2}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\dfrac{1}{k+1}$을 제시 : 6점
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=-\dfrac{1}{\ln 2}\int_0^1\dfrac{1}{x+1}dx$를 제시 : 8점
- 정답을 제시 : 6점

□ 예시 답안

[논제 1] 삼각형 $\triangle AB_2B_3$은 두 점 A와 B_2가 꼭짓점이고 R에 포함되는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형이므로 점 B_3은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 선분 $\overline{AB_2}$에서 가장 멀리 있는 점이다. 그런데 제시문 (나)에 의해서 선분 $\overline{AB_2}$와 B_3가 가장 멀리 있을때에는 선분 $\overline{AB_2}$의 기울기와 B_3에서의 접선의 기울기가 같으므로, 선분 $\overline{AB_2}$의 기울기는

$$\frac{3\left(a_2+\frac{2}{3}\right)(3a_2-1)}{a_2+\frac{2}{3}}$$

이고 $f'\left(\frac{1}{18}\right)=-4$이므로 $a_2=-\frac{1}{9}$을 얻는다. 마찬가지로 선분 $\overline{AB_1}$의 기울기는 $3(1-3a_1)$이고 $g'\left(-\frac{1}{9}\right)=1$이므로 $a_1=\frac{2}{9}$

[논제 2] S에 내접하는 임의의 삼각형 $\triangle ABC$가 있다. 당연히 $\triangle ABC$의 넓이보다 점 A,B가 꼭짓점이고 넓이가 최대인 삼각형 $\triangle ABB_1$의 넓이가 크거나 같고, 다시 삼각형 $\triangle ABB_1$의 넓이보다 삼각형 $\triangle AB_1B_2$의 넓이가 더 크거나 같다. 이 과정을 반복해서 얻은 삼각형 $\triangle AB_nB_{n+1}$의 넓이는 삼각형 $\triangle AB_{n-1}B_n$의 넓이보다 같거나 크다.
한편 수열 $\{a_n\}$을 살펴보기 위해서 [논제 1]과 같이 접선의 기울기와 선분의 기울기의 관계를 이용하자. 점 B_n이 $B_n(a_n,f(a_n))$과 $B_n(a_n,g(a_n))$인 두 가지 경우가 있으므로 각 경우를 나누어 생각하자. 먼저 $B_n(a_n,f(a_n))$이라면 $\triangle AB_nB_{n+1}$이 두 점 A,B_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 중 넓이가 최대가 되기 위해서는 선분 $\overline{AB_n}$의 기울기는 $y=g(x)$의 $x=a_{n+1}$에서의 접선의 기울기와 같아야 한다. 선분 $\overline{AB_n}$의 기울기는

$$\frac{3\left(a_n+\frac{2}{3}\right)(1-3a_n)}{a_n+\frac{2}{3}}$$

이고 곡선 $y=g(x)$의 $x=a_{n+1}$에서의 접선의 기울기는 $g'(a_{n+1})=18a_{n+1}+3$이므로 $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$을 얻는다. 마찬가지로 $B_n(a_n,g(a_n))$인 경우에도 $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$을 얻는다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이고, $a_1 \neq 0$이라면 삼각형 $\triangle \mathrm{AB}_n\mathrm{B}_{n+1}$의 넓이는 n이 증가할 때 점점 커지기 때문에 세 꼭짓점이 A, $(0, g(0))$, $(0, f(0))$일 때 삼각형의 넓이가 가장 크다(※ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). 그러므로 구하는 삼각형의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\{2-(-2)\} = \frac{4}{3}$$

[논제 2의 별해] 점 A를 꼭짓점으로 하고 R에 포함되는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형을 $\triangle \mathrm{ABC}$라 하면, 문제에서 제시된 과정에서 얻은 점 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3$은 (더 큰 삼각형을 만들 수 없으므로) $\{\mathrm{B}, \mathrm{C}\} = \{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2\}$, $\mathrm{B}_3 = \mathrm{B}_1$을 만족시킨다. 따라서 위와 마찬가지로 $a_2 = -\frac{1}{2}a_1$, $-\frac{1}{2}a_2 = a_3 = a_1$에서 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$이고, 점 B의 x좌표 a도 $a = a_1 = a_2 = a_3 = 0$이다. 그러므로 $\triangle \mathrm{ABC}$의 세 꼭짓점은 A, $(0, g(0))$, $(0, f(0))$이고, 넓이는 $\frac{4}{3}$

[논제 3] [논제 2]에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 첫째항 $a_1 = \frac{1}{4}$이고 공비 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$b_n = \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\log_2|a_k|} = -\frac{1}{\ln 2}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1}$$

따라서 제시문 (라)에 의해서

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\frac{1}{\ln 2}\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{1}{\ell+1} = -\frac{1}{\ln 2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n}+1}\frac{1}{n} = -\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx = -1$$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 정적분의 성질을 활용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 미분을 활용하여 접선의 방정식, 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 배종숙 외(2018), 수학, 금성출판사, 139-167쪽
○ 김원경 외(2018), 수학II, 비상, 112-131쪽
○ 황선욱 외(2019), 미적분, 미래엔, 105-120쪽

□ 문항해설

[논제 1] 역함수의 정적분과 함수의 정적분의 관계를 이해하고, 주어진 함수를 파악하여 정적분을 구하는 문제

[논제 2] 미분을 활용하여 접선의 방정식을 구하고 접선의 방정식으로부터 유도된 방정식이 실근을 단 하나만 가질 조건을 찾는 문제

□ 채점기준

[논제 1 평가기준]

- 함수 $f(x)$의 정적분과 역함수 $f^{-1}(x)$의 정적분의 관계를 제시 : 7점
- $\int_2^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + 4$를 제시 : 4점
- $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{8}$를 제시 : 4점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- P의 x 좌표와 t의 관계식을 제시 : 10점
- $h'(u) \geq 0$을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] $x=0$일 때 조건 (1)에서 $f(2)=f(0)+2$이고 조건 (2)에서 $f(0)+f(2)=2$이므로 $f(0)=0$, $f(2)=2$이다. 또, $x=1$일 때 조건 (2)에서 $f(1)=1$이다. 따라서 조건 (1)에서 모든 정수 k에 대하여

$$f(k)=k$$

$f(x)$가 역함수를 가지므로 $f^{-1}(-1)=-1$이고 $f^{-1}(4)=4$이다. 따라서

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx+\int_{-1}^{4} f^{-1}(x)\,dx = 16-1 = 15$$

이므로

$$\int_{-1}^{4} f^{-1}(x)\,dx = 15-\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$$

그러므로 $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$의 값을 구하면 된다. 조건 (1)에서

$$\int_{2}^{4} f(x)\,dx=\int_{0}^{2} f(x+2)\,dx=\int_{0}^{2}\{f(x)+2\}\,dx=\int_{0}^{2} f(x)\,dx+4$$

이므로

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+2\int_{0}^{2} f(x)\,dx+4 \qquad \cdots\cdots (*)$$

한편, 조건 (1)에서 $f(2-x)=f(-x)+2$이고, 조건 (2)에서 $0\le x\le 2$일 때 $f(2-x)=2-f(x)$이므로 $-2\le x\le 2$일 때 $f(x)+f(-x)=0$, 즉 원점에 대칭이다. 따라서

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$$

이고 조건 (3)에서

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{5}{8} \qquad \cdots\cdots (**)$$

또한, 조건 (1)에서

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x+2)\,dx=\int_{-1}^{0}\{f(x)+2\}\,dx=-\frac{5}{8}+2=\frac{11}{8}$$

이므로 (*)과 (**)에서

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = -\frac{5}{8}+2\left(\frac{5}{8}+\frac{11}{8}\right)+4=\frac{59}{8}$$

그러므로 $\int_{-1}^{4} f^{-1}(x)\,dx=15-\frac{59}{8}=\frac{61}{8}$

[논제 2] 점 $\mathrm{P}(u,g(u))$에서 원 O의 접선이 점 $\mathrm{P}(u,g(u))$에서 곡선 $y=g(x)$의 접선과 일치하므로 접선의 방정식은

$$y-g(u)=g'(u)(x-u)$$

또한, 점 P를 지나고 접선에 수직인 직선이 원 O의 중심 $(t,0)$을 지나므로

$$0 = -\frac{1}{g'(u)}(t-u)+g(u)$$

이고, $g(x)=ae^{x}+b$이므로 이를 정리하면

$$u+ae^{u}(ae^{u}+b)=t$$

문제에서 요구하는 b의 최솟값을 구하기 위해서

$$h(u)=u+ae^{u}(ae^{u}+b)$$

가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로 가는 일대일대응이 되도록 하는 b를 모두 찾으면 충분하다. 먼저

$$\lim_{u \to \infty} h(u) = \infty, \quad \lim_{u \to -\infty} h(u) = -\infty$$

이고 $h(u)$는 연속함수이므로 $g(t) \neq 0$인 각각의 t에 대하여 방정식 $h(u) = t$가 하나 이상의 해를 가진다. 또한, $h(u)$는 상수인 구간이 없으므로, $h(u)$가 일대일함수이기 위한 필요충분조건은 $h'(u) \geq 0$.

$$h'(u) = 1 + 2a^2 e^{2u} + abe^u$$

이므로 $h'(u) \geq 0$이기 위해서는

1) $b \geq 0$일 때는 모든 실수 u에 대하여 $h'(u) \geq 0$,

2) $b < 0$일 때는 $h'(u) = 1 + 2\left(ae^u + \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{8}$에서 $b \geq -2\sqrt{2}$는 $h'(u) \geq 0$이기 위한 필요충분조건이다.

그러므로 b의 최솟값은 $-2\sqrt{2}$