단국대학교 2023학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오전)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 그래프를 활용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 판정할 수 있는지를 평가

[논제 2] 함수의 연속과 미분을 활용하여 그래프의 개형을 분석할 수 있는지를 평가

[논제 3] 치환적분법, 부분적분법, 급수의 합을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 황선욱 외(2020), 수학, 미래엔, 75-78쪽
○ 황선욱 외(2020), 미적분, 미래엔, 110-117쪽
○ 류희찬 외(2022), 미적분, 천재교과서, 35-39쪽, 164-175쪽

□ 문항해설

[논제 1] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수가 구간별로 다르게 정의되어 있는 상황을 이해하고 미분을 활용하여 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제

[논제 2] 문제의 조건을 해석하여 함수의 그래프의 모양을 파악할 수 있는지를 측정하는 문제

[논제 3] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있고 급수의 합을 구할 수 있는지를 측정하는 문제

□ 채점기준

[논제 1 평가기준]
- 함수 $f(x)$의 그래프 또는 식을 제시 : 8점
- 정답을 제시 : 7점

[논제 2 평가기준]
- 함수 $f(x)$의 그래프 또는 식을 제시 : 8점
- $a=\sqrt{7}$을 제시 : 7점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]

- $\int \frac{\sin\sqrt[4]{x}}{4\sqrt{x}}\,dx = \int t\sin t\,dt$ 를 제시 : 7점
- a_n 을 제시 : 8점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 조건

$$(f(x)-3)(f(x)+3)(2f(x)-x^3+a^2x)=0$$

에서 각각의 실수 x에 대하여

$$f(x)=3 \text{ 또는 } f(x)=-3 \text{ 또는 } f(x)=\frac{1}{2}x(x-a)(x+a)$$

$f_0(x)=\frac{1}{2}x(x-a)(x+a)$라 하자. 함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점이 1개이고 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 양수이므로

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=3$이고 $f_0(x)$의 극댓값이 3보다 크거나
2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-3$이고 $f_0(x)$의 극댓값이 3보다 커야 한다.

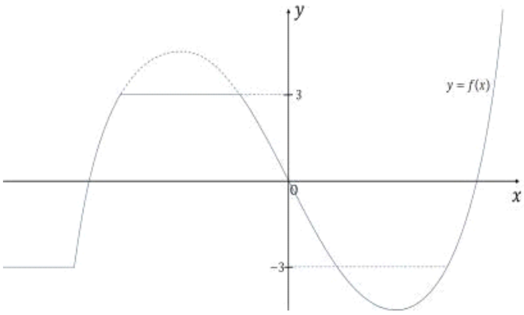
$f_0(x)$는 극댓값 $f_0\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}a^3$ 을 갖고 위의 1)과 2)에 의하여 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f_0(x)$의 극댓값인 $\frac{\sqrt{3}}{9}a^3$이다. 이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 -3이므로 $\frac{\sqrt{3}}{9}a^3+(-3)=24$이고, $a=3\sqrt{3}$

[논제 2] 함수 $f(x)$에 따른 $g(k)$의 값을 살펴보면,

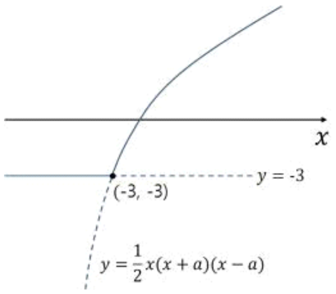
1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$일 때 : $\lim_{k\to-\infty} g(k)=\lim_{k\to\infty} g(k)=1$
2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm 3$일 때 : $\lim_{k\to-\infty} g(k)=0$, $\lim_{k\to\infty} g(k)=2$
3) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\pm 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm 3$일 때 : $\lim_{k\to-\infty} g(k)=\lim_{k\to\infty} g(k)=1$
4) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\pm 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$일 때 : $\lim_{k\to-\infty} g(k)=2$, $\lim_{k\to\infty} g(k)=0$

조건 (1)에 의해 가능한 경우는 위의 4) 뿐이고, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$인 경우 $g(-a)=2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$인 경우 $g(-a)=3$이므로 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$

위의 사실과 조건 (3)에 의해 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



조건 (4)로부터 점 $(-3, -3)$은 직선 $y = -3$과 곡선 $y = \frac{1}{2}x(x-a)(x+a)$의 교점이다.



$-3 = \frac{1}{2}(-3)(-3-a)(-3+a)$로부터 $a = \sqrt{7}$. 따라서

$$f(x) = \begin{cases} -3 & (x < -3) \\ \frac{1}{2}x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) & (-3 \le x < -2) \\ 3 & (-2 \le x < -1) \\ \frac{1}{2}x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) & (x \ge -1) \end{cases}$$

이므로 $f(-2a) + f\left(-\frac{a}{2}\right) + f(2a) = 21\sqrt{7}$

[논제 3] $x = t^4$이라고 하면 $\sin\sqrt[4]{x} = \sin t$, $\sqrt{x} = t^2$, $dx = 4t^3 dt$. 치환적분법을 이용하면

$$\int \frac{\sin\sqrt[4]{x}}{4\sqrt{x}}dx = \int t\sin t\,dt$$

한편 부분적분법을 이용하면

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

이므로

$$a_n = \frac{1}{4\pi}\int_{\pi^4}^{n^4\pi^4}\frac{\sin\sqrt[4]{u}}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi}x\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_{\pi}^{n\pi} = -n(-1)^n - 1$$

따라서 $a_{2n-1} = 2n-2$ 이고 $a_{2n} = -2n-1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{a_{2n}}}{2^{a_{2n-1}}} = \sum_{n=1}^{\infty}2^{-4n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{15}$$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 미분을 활용하여 함수의 증가와 감소를 판단할 수 있는지를 평가

[논제 2] 부분적분법을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 황선욱 외(2022), 수학 II, 미래엔, 82-84쪽
○ 권오남 외(2022), 미적분, 교학사, 88-91쪽, 158-161쪽
○ 류희찬 외(2022), 미적분, 천재교과서, 103-106쪽

□ 문항해설

[논제 1] 합성함수와 삼각함수 미분법을 사용하고, 함수의 증가와 감소를 미분을 이용하여 판단하는 문제

[논제 2] 미분을 활용하여 그래프의 개형을 파악하고, 부분적분법을 활용하는 문제

□ 채점기준

[논제 1 평가기준]
- 합성함수의 도함수 제시 : 5점
- $\{f(g(x))\}' > 0$이 되는 구간을 제시 : 7점
- 정답을 제시 : 8점

[논제 2 평가기준]
- 직선의 방정식을 제시 : 3점
- $h(1) = 3$을 제시 : 5점
- 부분적분법을 사용하여 부정적분을 제시 : 12점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] $k(x)=f(g(x))$라 하자. 그러면 함수 $k(x)$는 미분가능하고

$$k'(x)=2f'(\sin 2x)\cos 2x$$

$\sin 2x$와 $\cos 2x$의 주기는 π이므로 열린구간 $(0, \pi)$에서 조건 (1)에 의하여,

1) $f'(\sin 2x)>0$, $\cos 2x>0$인 경우 :

$f'(\sin 2x)>0$이려면 $-1 \leq \sin 2x<0$이어야 하므로 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$이고

$\cos 2x>0$이려면 $0<x<\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$이어야 한다. 따라서 $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$

2) $f'(\sin 2x)<0$, $\cos 2x<0$인 경우 :

$f'(\sin 2x)<0$이려면 $0<\sin 2x \leq 1$이어야 하므로 $0<x<\frac{\pi}{2}$이고

$\cos 2x<0$이려면 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$이어야 한다. 따라서 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$

1), 2)로부터 열린구간 $(0, \pi)$에서 $\{f(g(x))\}'>0$인 구간은 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$이므로

$$t_1=\frac{\pi}{4},\ t_2=\frac{\pi}{2},\ t_3=\frac{3\pi}{4},\ t_4=\pi$$

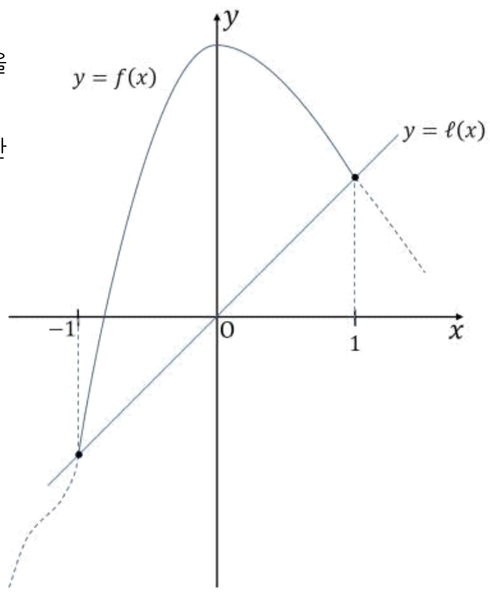
따라서 $(t_2-t_1)+(t_4-t_3)=\frac{\pi}{2}$. 함수 $k(x)$는 주기가 π인 주기 함수이므로 열린구간 $(0, n\pi)$에서

$$\sum_{j=1}^{p}(t_{2j}-t_{2j-1})=\frac{5\pi}{2}$$

이려면 $n=5$

(참고) 조건 (1)에서 $f'(0)=0$이고, 조건 (3)으로부터 닫힌구간 $[-1,1]$에서 연속함수 $f'(x)$는 감소한다. 따라서 $f'(-1)>0$이고 $f'(1)<0$

[논제 2] 조건 (2)로부터 $f(-1)=-f(1)$이므로
두 점 $(-1,f(-1))$과 $(1,f(1))$을 지나는 직선의 방정식을 $y=\ell(x)$라 하면 $\ell(x)=f(1)x$이다.
한편 조건 (3)과 (4)에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 열린구간 $(-1,1)$에서는 위로 볼록하다. 따라서 직선 $y=\ell(x)$와 곡선 $y=f(x)$는 오직 두 점 $(-1,f(-1))$, $(1,f(1))$에서만 만나고 닫힌구간 $[-1,1]$에서 $\ell(x) \leq f(x)$이다.
즉, 곡선 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같다.



조건 (4)에 의하여

$$3=\int_{-1}^{1}\{f(x)-\ell(x)\}dx=\int_{-1}^{1}\{f(x)-f(1)x\}dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx$$

이므로

$$h(1)=3 \qquad \text{.....} \ (*)$$

부분적분법에 의하여

$$\int h(x)\sin x\,dx=\int h(x)\cos x\frac{\sin x}{\cos x}dx \qquad \text{.....} \ (**)$$
$$=-h(x)\cos x\ln\cos x+\int\{f(x)\cos x-h(x)\sin x\}\ln\cos x\,dx$$

이고

$$\int h(x)\sin x\,dx=-h(x)\cos x+\int f(x)\cos x\,dx \qquad \text{.....} \ (***)$$

그러므로 식 (**)와 (***)에 의하여

$$\int\left\{f(x)\cos x+h(x)\sin x\ln\cos x-f(x)\cos x\ln\cos x\right\}dx$$
$$=h(x)\cos x-h(x)\cos x\ln\cos x+C$$

이므로(C는 적분상수), 식 (*)와 $h(-1)=0$에 의하여

$$\int_{-1}^{1}\left\{f(x)\cos x+h(x)\sin x\ln\cos x-f(x)\cos x\ln\cos x\right\}dx$$
$$=3\cos1-3\cos1\ln\cos1$$
$$=3\cos1(1-\ln\cos1)$$
$$=3\cos1\ln\frac{e}{\cos1}$$