단국대학교 2023학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제
(오후)

전 형 명	논술우수자	모집단위	
수험번호		성　　명	

☑ 수험생 유의사항

1. 시험시간은 120분이며, 고사 종료시까지 퇴실할 수 없습니다. (중도퇴실할 경우 결시처리)
2. 문제번호와 답안번호가 반드시 일치하여야 합니다. (일치하지 않을 경우 0점 처리됨)
3. 문제별 답안작성란을 벗어나지 않게 작성하여야 합니다.
4. 답안 작성 시 인적사항 등 답안과 관련 없는 내용을 작성한 경우 0점처리 됩니다.
5. 답안은 반드시 **검정색 필기구**로 작성하시기 바랍니다.
   (연필, 샤프, 빨간색이나 파란색 필기구 사용금지)
6. 답안지는 교체가 불가하오니 원고지 교정부호 또는 수정테이프를 사용하여 수정하시기 바랍니다.
7. 연습지는 대학에서 제공하는 A4용지를 활용하시기 바랍니다.
8. 휴대폰 등 전자기기는 전원을 끄고 비닐백에 넣어 좌석 아래에 보관하시기 바랍니다. 고사 중에 벨소리, 진동, 알람 등의 소리가 울릴 경우 부정행위자로 간주하여 처리합니다.

※ 시험이 시작되기 전에는 표지를 넘기지 마십시오.

단국대학교
DANKOOK UNIVERSITY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 함수 $f(x)$가 $x=c$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(c, f(c))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(c)=f'(c)(x-c)$

(나) 열린구간 (a,b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=c$ 에서 최댓값을 가질 때 $f'(c)=0$ (단, $a<c<b$)

(다) 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다. 즉, 공비 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{n+1}=r\,a_n \text{ (단, } n=1,2,3,\cdots)$$

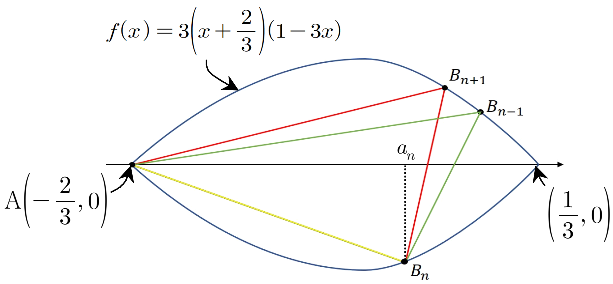
또한 첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x \quad \left(\text{단, } \triangle x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\triangle x\right)$$

함수 $f(x)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(1-3x)$의 그래프와 $g(x)=-f(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형을 R라 하고 R의 둘레를 S라 하자.

$-\frac{2}{3}<a<\frac{1}{3}$에 대하여 S 위의 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{2}{3},0\right)$과 $\mathrm{B}(a,g(a))$를 꼭짓점으로 하고 R에 포함되는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형의 꼭짓점을 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{B}_1$이라 하고, 다시 두 점 A와 B_1을 꼭짓점으로 하고 R에 포함되는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형의 꼭짓점을 $\mathrm{A},\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2$라 하자. 이 과정을 계속 반복하여 자연수 n에 대하여 두 점 A와 B_n을 꼭짓점으로 하고 R에 포함되는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형의 꼭짓점을 $\mathrm{A},\mathrm{B}_n,\mathrm{B}_{n+1}$이라 하자. 또한 점 B_n의 x좌표를 a_n이라 하자.



[논제 1] $\mathrm{B}_3\left(\frac{1}{18}, f\left(\frac{1}{18}\right)\right)$일 때 a_1의 값을 구하시오. (15점)

[논제 2] 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 참고하여 A가 꼭짓점이고 R에 포함되는 삼각형의 넓이의 최댓값을 구하시오. (20점)

[논제 3] $a=-\frac{1}{2}$일 때 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$b_n=\frac{1}{\ln|a_n|}+\frac{1}{\ln|a_{n+1}|}+\cdots+\frac{1}{\ln|a_{2n-1}|}=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\ln|a_k|}$$

이라 하자. 제시문 (다), (라)를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 구하시오. (20점)

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때, $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
(나) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x = g(t)$로 놓으면 $$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$
(다) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여 • $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 증가 • $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 감소

실수 전체의 집합에서 연속이고 증가하는 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x) + 2$
(2) $0 \le x \le 2$인 모든 x에 대하여 $f(x) + f(2-x) = 2$
(3) $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$

함수 $g(x)$를 $g(x) = ae^x + b$라 하자. (단, a, b는 상수이고 $a > 0$)

[논제 1] 정적분 $\int_{-1}^4 f^{-1}(x)\,dx$의 값을 구하시오. (20점)

[논제 2] $g(t) \ne 0$인 각각의 실수 t마다 다음 조건을 만족시키는 점 P가 단 하나씩만 존재할 때 실수 b의 최솟값을 구하시오. (25점)

곡선 $y = g(x)$와 중심이 $(t, 0)$인 어떤 원 O가 점 P에서 만나고 점 P에서 곡선 $y = g(x)$와 원 O는 동시에 접하는 접선을 갖는다.