수학 가이드 답안지 [자연계열] <오전> (문항별 5점)

31. $x=-1,1,2$ 에서만 $f(x)$ 의 극한값과 연속성을 조사하면 된다. 먼저 극한값이 존재하는지 살펴보면

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=3,\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=-1;\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=1,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=1;\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=2,\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=2$$

이므로, $f(x)$는 $x=-1$에서만 극한값이 존재하지 않고(연속도 아니다), 따라서 $A=1$. 한편 $\lim_{x\to 1} f(x)=1\neq 0=f(1)$이고 $x=2$의 함숫값 $f(2)$는 정의되어 있지 않으므로 $x=-1,1,2$에서 연속이 아니고 $B=3$. 그러므로 $A+B=4$.

32. $x=f^{-1}(x)+e^{f^{-1}(x)}$ 에서 $1=(f^{-1})'(1)(1+e^{f^{-1}(1)})=(f^{-1})'(1)\times 2$ 이므로 $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{2}$

33. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}xe^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

34. $f'(x)=2x-\frac{1}{8x}$ 이므로 $1+(f'(x))^2=1+4x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}=\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2$. 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^{e^4}\left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx=\left[x^2+\frac{1}{8}\ln x\right]_1^{e^4}=e^8-\frac{1}{2}$$

35. ㉠ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}=1$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$이 수렴하므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+3}}$도 수렴한다.

㉡ $\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right\}$은 감소수열이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}=0$ 이므로 $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$는 수렴한다.

㉢ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(x+1)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{2^n}(x+1)^n}\right|=\left|\frac{x+1}{2}\right|$ 이므로 주어진 멱급수는 구간 $(-3,1)$에서 수렴한다.

$x=1,\ -3$이면 급수는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(\pm 2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\mp 1)^n$.

주어진 멱급수가 수렴하게 되는 정수 x의 개수는 3

36. $x=r\cos\theta=(1+\sin\theta)\cos\theta=\cos\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}$ 그리고 $y=r\sin\theta=\sin\theta+\sin^2\theta$ 이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\cos\theta+\sin 2\theta}{-\sin\theta+\cos 2\theta}$. 따라서 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-1-\sqrt{2}$

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

37. 두 점을 지나는 직선의 방향벡터는 $<1,\ -11,\ -14>$이므로 직선의 방정식은 $x-2=-\dfrac{y-4}{11}=-\dfrac{z+3}{14}$

직선이 xy 평면과 만나는 경우는 $z=0$이므로 $x-2=-\dfrac{y-4}{11}=-\dfrac{3}{14}$ 에서 $a=\dfrac{25}{14},b=\dfrac{89}{14}$이고 $4a-b=\dfrac{11}{14}$

38. $\nabla f(x,y,z)=\langle 2xy, x^2-z^3, -3yz^2+1\rangle$, $\nabla f(1,-2,0)=\langle -4,1,1\rangle$이고 $\vec{v}=\langle 2,1,-2\rangle$ 방향의

단위벡터 $\vec{u}=\left\langle \dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right\rangle$이므로 방향도함수는 $D_{\vec{u}}f(1,-2,0)=-3$

39. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\int_x^{\sqrt{n}} f(y^2)\,dy\,dx = \int_0^{\sqrt{n}}\int_0^{y} f(y^2)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^n f(t)dt=\frac{2}{n}>\frac{1}{2}$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 3

40. $f_x(x,y)=2x-2xy$이고 $f_y(x,y)=2y-x^2$이다. $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$을 만족시키는 $(x,y)=(0,0)$
$(\sqrt{2},1), (-\sqrt{2},1)$이지만 정의역 E에 속하는 점은 $(0,0)$ 뿐이다. (따라서 ㉡은 거짓)
한편, $f_{xx}(0,0)=2$, $f_{yy}(0,0)=2$, $f_{xy}(0,0)=0$이므로 $D(0,0)=f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=4>0$이고
$f_{xx}(0,0)>0$. 따라서 극값판정법에 의하여 $f(0,0)=4$는 극솟값이다.
정사각형의 경계를 살펴보면

(1) L_1 : 양 끝점이 $(1,-1)$과 $(1,1)$인 선분

$f(1,y)=y^2-y+5$, $(-1\le y\le 1)$이므로 선분 L_1에서 f의 최댓값은 7이고 최솟값은 $\dfrac{19}{4}$

(2) L_2 : 양 끝점이 $(-1,1)$과 $(1,1)$인 선분

$f(x,1)=5$, $(-1\le x\le 1)$이므로 선분 L_2에서 f의 최댓값은 5이고 최솟값은 5

(3) L_3 : 양 끝점이 $(-1,-1)$과 $(-1,1)$인 선분

$f(-1,y)=y^2-y+5$, $(-1\le y\le 1)$이므로 선분 L_3에서 f의 최댓값은 7이고 최솟값은 $\dfrac{19}{4}$

(4) L_4 : 양 끝점이 $(-1,-1)$과 $(1,-1)$인 선분

$f(x,-1)=2x^2+5$, $(-1\le x\le 1)$이므로 선분 L_4에서 f의 최댓값은 7이고 최솟값은 5

그러므로 옳은 설명은 ㉠, ㉢이고, 옳은 것의 개수는 2

41. $f(x,y)=(6x^2-3xy-3y^2)e^{3x}=3(2x+y)(x-y)e^{3x}$. 여기서 $u=2x+y$, $v=x-y$라고 하면

$x=\dfrac{u+v}{3}, y=\dfrac{u-2v}{3}$이고 야코비안 $J=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{3}$이다. 따라서, $R=\{(u,v)\,|\,4\le u\le 7,\ -1\le v\le 2\}$

라 할 때,

$$\iint_D f(x,y)dA=\iint_R uve^{u+v}du\,dv=\int_{-1}^{2}\int_4^7 uve^{u+v}du\,dv=\left[\int_{-1}^{2}ve^v\,dv\right]\left[\int_4^7 u\,e^u\,du\right]$$
$$=\left[ve^v-e^v\right]_{-1}^{2}\times\left[u\,e^u-e^u\right]_4^7=6e^9+9e^6-6e^3$$

42. $E=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ z\ge 0\}$, $S_0=\{(x,y,z)|x^2+y^2 \le a^2,\ z=0\}$, $\overline{S}=S\cup S_0$라 하자.

다이버전스 정리에 의하여 $\text{div}\,\vec{F}=1$이므로 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$라 할 때,

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{12}\pi &= \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\overline{S}} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_0} \vec{F}\cdot d\vec{S} \\ &= \iiint_E 1\,dV + \iint_D \langle u+v,0,u^2\rangle \cdot \langle 0,0,1\rangle dudv \\ &= \frac{2a^3}{3}\pi + \int_0^a \int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta d\theta dr = \frac{2a^3}{3}\pi + \frac{a^4}{4}\pi\end{aligned}$$

그러므로 $8a+3a^2=1$에서 $\frac{1}{a}-3a=8$

43. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2-3y^2+\tan y^2)=2x=\frac{\partial}{\partial y}(3+2xy)$이므로 주어진 선적분은 경로 독립이다. 곡선 L를 $(0,0)$에서 $(2\pi,0)$까지의 선분이라 하면

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} <3,\,t^2> \cdot <1,0>dt = \int_0^{2\pi} 3dt = 6\pi$$

44. ㉠ $1=\sec^2\theta-\tan^2\theta=\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}$: 거짓

㉡ $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)=|\vec{r}(t)|^2=1$ 이고 양변을 미분하면 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)=0$: 참

㉢ 두 벡터 $\vec{u},\vec{v}$가 이루는 사잇각을 θ라 하면

$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\theta = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\theta = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$: 참

㉣ 발산과 회전의 정의와 Clairaut 정리에 의하여 참

45. A를 대각화하여 $A=PDP^{-1}$, $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 로 표시하면

$\det[A^2-2I]=\det[P(D^2-2I)P^{-1}]=\det[D^2-2I]=2$

46. $T(<1,0,0>)=<1,3> \ =1<1,3>+0<2,2>$
$T(<1,1,0>)=<2,2> \ =0<1,3>+1<2,2>$
$T(<1,1,2>)=<6,10> \ =2<1,3>+2<2,2>$

이므로 T의 행렬표현은 $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$

47. 주어진 행렬을 A라고 하자. A의 특성방정식은 $\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)(a^2-\lambda)(2a-\lambda)$이므로,
λ에 관한 항등식 $-(1-\lambda)(a^2-\lambda)(2a-\lambda)=\lambda^3-9\lambda^2+24\lambda-8a$에서 $a=2$

48. $-3x^4 = W(f,g)(x) = f(x) - xf'(x)$, $f(-1)=0$을 풀면 $f(x)=x^4+x$. 그러므로 $f(1)=2$

49. $x=e^t$이라 하면 주어진 방정식은

$$\frac{d^2z}{dt^2}+z=\sec t \qquad \text{..........} \ (*)$$

으로 변형된다. 따라서 보조해 $z_c = c_1\sin t + c_2\cos t$이므로 특수해 $z_p = u(t)\sin t + v(t)\cos t$를 식 (*)에 대입하여 $z_p = t\sin t + \cos t\ln(\cos t)$를 얻는다. 따라서 주어진 방정식의 해는

$$y(x) = z(\ln x) = c_1\sin(\ln x) + c_2\cos(\ln x) + \ln x\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\ln(\cos(\ln x))$$

$y(1)=3$, $y(e^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{3\pi}{2}$이므로 $c_1=\pi$, $c_2=3$. 그러므로

$$f(x) = \pi\sin(\ln x) + 3\cos(\ln x) + \ln x\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\ln(\cos(\ln x))$$

여기서 $f(e^{2j\pi}) = 3$ $(j=1,2,\cdots,2023)$이므로 $\sum_{j=1}^{2023} f(e^{2j\pi}) = 3\times 2023 = 6069$

50. $f(u) = \int_0^u e^{-\tau}\sinh(2\tau)\cos(u-\tau)\,d\tau$ 라 하면

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(e^{-t}\sinh 2t)(s)\,\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{2}{(s+1)^2-4}\times\frac{s}{s^2+1} = \frac{2s}{(s-1)(s+3)(s^2+1)}$$ 이므로

$$\mathcal{L}(g(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{2}{(s-1)(s+3)(s^2+1)}$$