수학 가이드 답안지 [자연계열] < 오후 > (문항별 5점)

31. $\dfrac{\cot 2\theta}{\csc\theta}-\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\sec\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\tan 2\theta}-\cos\theta\sin(\cos\theta)$이고, $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\tan2\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\cos\theta}{2\sec^2 2\theta}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\lim\limits_{\theta\to0}\left(\dfrac{\cot 2\theta}{\csc\theta}-\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\sec\theta}\right)=\dfrac{1}{2}-\sin1$

32. $f'(x)=-e^{-x^2/8}+\dfrac{1}{4}x^2e^{-x^2/8}=\dfrac{1}{4}(x-2)(x+2)e^{-x^2/8}$이고 극댓값은 $f(-2)=2e^{-1/2}$

그리고 $f(-4)=4e^{-2}$이고 $f(1)=-e^{-1/8}$이다. 따라서 최솟값은 $-e^{-1/8}$이고 최댓값은 $2e^{-1/2}$이므로 구하는 값은 $2e^{-1/2}-e^{-1/8}$

33. 회전체의 부피를 V라 하면

$$V=\pi\int_0^2(4y^2-y^4)dy=\pi\left[\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5\right]_0^2=\frac{64}{15}\pi$$

34. ㄱ. 비교판정법에 의하여 $a_n=\dfrac{n^2+2n}{\sqrt{3+n^5}}$, $b_n=\dfrac{n^2}{n^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{5}{2}}+2n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+n^5}}=1$이고

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$는 발산하므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$도 발산.

ㄴ. 비판정법에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e>1$이므로 발산

ㄷ. $a_n=\dfrac{(-1)^n2n}{3n-1}$이라 하면, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 발산

ㄹ. $n\ge8$에 대하여 $\dfrac{\ln\sqrt{n}}{n}>\dfrac{1}{n}$이고 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=\infty$이므로 비교판정법에 의하여 발산

ㅁ. 적분판정법에 의하여 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$는 $[1,\infty)$에서 연속이며 감소하고

$\int_1^\infty\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx=\ln\left|(x+\dfrac{1}{2})+\sqrt{(x+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}}\right|_1^\infty=\infty$이므로 발산

35. ㄱ. $\int_1^\infty\dfrac{\ln x}{x}dx=\lim\limits_{u\to\infty}\int_0^u tdt=\lim\limits_{u\to\infty}\left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^u=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{1}{2}u^2=\infty$

ㄴ. $\int_0^2x^2\ln xdx=\lim\limits_{u\to0^+}\int_u^2x^2\ln xdx=\lim\limits_{u\to0^+}\left[\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{3}\int_u^2x^2dx\right]_u^2=\lim\limits_{u\to0^+}\left[\dfrac{8}{3}\ln2-\dfrac{1}{3}u^3\ln u-\dfrac{8}{9}+\dfrac{1}{9}u^3\right]$

$=\dfrac{8}{3}\ln2-\dfrac{8}{9}-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{u\to0^+}u^3\ln u=\dfrac{8}{3}\ln2-\dfrac{8}{9}$

ㄷ. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(1/2)}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2(1/2)}}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

ㄹ. $\int_0^\infty\dfrac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{u\to\infty}\int_0^u\dfrac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{u\to\infty}\left[\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^u=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\infty$

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

36. $\dfrac{dr}{d\theta}=ae^{a\theta}$이므로 $0\le\theta\le 2\pi$에서 곡선의 길이 L은

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2a\theta}+a^2e^{2a\theta}}\,d\theta=\sqrt{a^2+1}\int_0^{2\pi}e^{a\theta}d\theta=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\,(e^{2a\pi}-1)$$

이므로 $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}=3$이고 양수 a를 구하면 $a=\dfrac{1}{2\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{4}$

37. 우선 $\nabla f(x,y)=<\cos x+2ye^{2xy},2xe^{2xy}>$이므로 $\nabla f(a,b)=<3,0>$이려면

$$\cos a+2be^{2ab}=3,\quad 2ae^{2ab}=0$$

이다. 따라서 $a=0$이고 $b=1$이다. 따라서 $a+b=1$

38. $$\iiint_E yz\cos(x^5)dV=\int_0^1\int_0^x\int_x^{2x}yz\cos(x^5)dydzdx=\frac32\int_0^1\int_0^x x^2z\cos(x^5)dzdx$$
$$=\frac34\int_0^1 x^4\cos(x^5)dx=\frac{3}{20}\sin(1)$$

이므로 $a=\dfrac{3}{20}$

39. $g(x,y)=x^2+y^2$라 하자. 곡선 $g(x,y)=x^2+y^2$에서 라그랑주 곱셈자를 이용하여 실수 λ에 대한 연립방정식

$$\nabla f=\lambda\nabla g,\qquad g(x,y)=r^2$$

을 풀자. 그러면 $f_x=\lambda g_x,\ f_y=\lambda g_y,\ x^2+y^2=r^2$이다. 즉,

$$2x=2\lambda x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$4y=2\lambda y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$x^2+y^2=r^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

이다. (1) 에서 $x=0$ 또는 $\lambda=1$이므로,

(i) 만일 $x=0$이면 (3)에서 $y=\pm r$이다.

(ii) 만일 $\lambda=1$이면 (2)에서 $y=0$이고 (3)에 의하여 $x=\pm r$이다.

따라서 함수 f는 네 점 $(0,r)$, $(0,-r)$, $(r,0)$, $(-r,0)$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. 여기서,

$$f(0,r)=2r^2,\ f(0,-r)=2r^2,\ f(r,0)=r^2,\ f(-r,0)=r^2$$

이므로 최댓값은 $2r^2$이고 최솟값은 r^2이므로 $3r^2=12$에서 $r=2$이다.

40. $u=y-\sqrt{x}$, $v=y+\sqrt{x}$라 하자. 그러면 $x=\dfrac14(v-u)^2$, $y=\dfrac12(v+u)$이고

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac12(v-u) & \frac12(v-u)\\ \frac12 & \frac12\end{vmatrix}=-\frac12(v-u)$$

또한 $D^*=\{(u,v)|0\le u\le 2,\ 4\le v\le 6\}$라 하면

$$\iint_D\frac{1}{2\sqrt x}e^{y-\sqrt x}dA=\frac12\iint_{D^*}\frac{1}{v-u}e^u(v-u)dA=\frac12\int_0^2\int_4^6 e^u dvdu=e^2-1$$

41. $P(x,y)=y^2$, $Q(x,y)=3xy$라 하면 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y$이므로 그린(Green)정리에 의하여

$$\int_C\vec F\cdot d\vec r=\iint_D ydA=\int_0^\pi\int_1^3 r^2\sin\theta drd\theta=\frac{52}{3}$$

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

42. 우선 $\text{curl}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$이므로 적당한 삼변수함수 f가 존재하여 $\nabla f = \overrightarrow{F}$이다. 여기서

$$f_x = y^2 \qquad \text{......................(1)}$$

$$f_y = 2xy + z\cos(yz) + e^z \qquad \text{......................(2)}$$

$$f_z = y\cos(yz) + ye^z \qquad \text{......................(3)}$$

(1)에서 $f(x,y,z) = xy^2 + h_1(y,z)$ 이고 (2)에서 $\dfrac{\partial h_1}{\partial y} = z\cos(yz) + e^z$ 이다.

따라서 $h_1(y,z) = \sin(yz) + ye^z + h_2(z)$이므로 $f(x,y,z) = xy^2 + \sin(yz) + ye^z + h_2(z)$이다.

한편 (3)에서 $h_2'(z) = 0$이므로 $h_2(z) = c_1$이고, 따라서 $f(x,y,z) = xy^2 + \sin(yz) + ye^z + c$이다. 그러므로

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = f(0,1,1) - f(-1,0,0) = \sin 1 + e$$

43. 곡면 S의 매개변수 표현은 $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = z \quad 0 \le \theta \le 2\pi$ 이고 $0 \le z \le 1 + \cos\theta$이다.

R^3에서 R^3로의 좌표변환 $T(x,y,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$을 생각하고 $D = \{(\theta, z) \mid 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \le z \le 1 + \cos\theta\}$ 라 하면 $T_\theta \times T_z = <\cos\theta, \sin\theta, 0>$이고 $\|T_\theta \times T_z\| = 1$이므로

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\mathrm{S} = \iint_D z\,\|T_\theta \times T_z\|\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} z\,dz\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 $a = \dfrac{3}{2}$

44. $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = <0,2,2>$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} <4,3,-2>$, $\overrightarrow{\mathrm{PS}} = <5,5,1>$, $\overrightarrow{\mathrm{QR}} = <4,1,-4>$, $\overrightarrow{\mathrm{QS}} = <5,3,-1>$ 이고

(i) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}} = < -10,8,-8 >$이고 면 PQR 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}| = \sqrt{57}$

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PS}} = < -8,10,-10 >$이고 면 PQS 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PS}}| = \sqrt{66}$

(iii) $\overrightarrow{\mathrm{PR}} \times \overrightarrow{\mathrm{PS}} = <13,-14,5>$이고 면 PRS 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PR}} \times \overrightarrow{\mathrm{PS}}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{390}$

(iv) $\overrightarrow{\mathrm{QR}} \times \overrightarrow{\mathrm{QS}} = <11,-16,7>$이고 면 QRS 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QR}} \times \overrightarrow{\mathrm{QS}}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{426}$

사면체 PQRS 의 겉넓이는 $\sqrt{57} + \sqrt{66} + \dfrac{1}{2}\sqrt{426} + \dfrac{1}{2}\sqrt{390}$

45. $AB = A\,\mathrm{adj}(A) = A\det(A)\dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}A = \det(A)AA^{-1} = \det(A)E$ 이므로 $A\,\mathrm{adj}(A)$의 대각성분의 합과 $\det(A)E$의 대각성분의 합은 같다. $\det A = -6$이고, $AB = A\,\mathrm{adj}(A)$의 대각성분의 합은 $3 \times (-6) = -18$

46. 양의 y축에 대하여 $\pi/3$만큼 반시계방향으로 회전시키는 변환 T_y는

$$T_y = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & 0 & \sin(\pi/3) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\pi/3) & 0 & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

양의 z축에 대하여 $\pi/6$만큼 반시계방향으로 회전시키는 변환 T_z는

$$T_z = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) & 0 \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 변환은

$$T = T_z \circ T_y = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & -1/2 & 3/4 \\ 1/4 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

47. 연립일차방정식을 풀면 $x_1=-3s-4t-2u$, $x_2=s$, $x_3=-2t$, $x_4=t$, $x_5=u$, $x_6=0$ $(s,t,r$는 실수)이므로

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이고 $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$는 독립이므로 해공간의 기저가 된다. 따라서 해공간의 차원은 3차원.

48. $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{3x^{2/3}(x^{2/3}+1)}dx$이고 변수분리형이다. 양변을 적분하면

$$\ln y = \int \frac{1}{3x^{2/3}(x^{2/3}+1)}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \tan^{-1}u + C = \tan^{-1}(x^{1/3}) + C$$

이다. 조건으로부터 $C=-\frac{\pi}{4}$이고 미분방정식의 해는 $\ln y = \tan^{-1}(x^{1/3}) - \frac{\pi}{4}$ 또는 $y = e^{\tan^{-1}(x^{1/3}) - \frac{\pi}{4}}$.

따라서 $y(3\sqrt{3}) = e^{\pi/12}$.

49. 주어진 미분방정식의 일반해는 $y = C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x) + \frac{2}{5}x\ln x - \frac{4}{25}x$이다.

주어진 조건으로부터 $C_1 = \frac{4}{25}$이고 $C_2 = -\frac{4}{25}e^{3\pi/4}$이고 미분방정식의 해는

$$y = \frac{4}{25}\cos(2\ln x) - \frac{4}{25}e^{3\pi/4}\sin(2\ln x) + \frac{2}{5}x\ln x - \frac{4}{25}x.$$

따라서 $y(e) = \frac{4}{25}\cos(2) - \frac{4}{25}e^{3\pi/4}\sin(2) + \frac{6}{25}e.$

50. 계수행렬의 특성방정식은 $(\lambda+3)^2=0$이고 $\lambda_1=\lambda_2=-3$은 중복도 2인 고유값이다. 대응하는 고유벡터는 $K=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$이고 따라서 $X_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t}$는 주어진 미분방정식의 한 해가 된다.

X_1과 일차독립인 해를 $X_2(t) = Kte^{-3t} + Pe^{-3t}$라 하면 $P=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$이다. 그러므로 $X_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-3t}$이고 미분방정식의 일반해는

$$X(t) = C_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + C_2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-3t}\right]$$

조건으로부터 미분방정식의 해는

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} - 4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-3t} \text{이고 } X(1) = \begin{pmatrix} -11e^{-3} \\ -3e^{-3} \end{pmatrix}$$

단국대학교
DANKOOK UNIVERSITY