수학 가이드 답안지 [자연계열] < 오전 > (문항별 5점)

31. $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{e^x}=1$

32. $f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$ 이고 증감을 조사하면 극솟값은 $f(2)=12$.

$f(1)=17$이고 $f(4)=20$이다. 따라서 $m=12$이고 $M=20$ 따라서 $m+M=32$

33. 영역의 넓이는

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sin 2x)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)dx=\left[\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

34. $a_n=(-1)^n\frac{(x+3)^n}{n\,3^n}$라 하면 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n|x+3|}{3(n+1)}\to\frac{|x+3|}{3}$이므로 비판정법에 의하여

$\frac{|x+3|}{3}<1$일 때 수렴한다. 그러므로 $-6<x<0$이다. 한편

(i) $x=-6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-3)^n}{n\,3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$이므로 발산

(ii) $x=0$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n\,3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$이므로 교대급수판정법에 의하여 수렴.

그러므로 수렴하는 정수는 $x=-5,-4,-3,-2,-1,0$이므로 6개

35. ㄱ. $t=\ln x$라 하면 $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{u\to\infty}\int_0^u te^{-t}dt=1$

ㄴ. $\int_2^{\infty}\frac{2+e^{-x}}{x}dx>\int_2^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{u\to\infty}\int_2^u\frac{1}{x}dx=\lim_{u\to\infty}[\ln x]_2^u=\infty$

ㄷ. $\int_1^2\frac{x}{1-x^2}dx=\lim_{u\to 1+}\left(-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|_u^2\right)=-\infty$

ㄹ. $\int_1^3\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{u\to 1^+}\int_u^3\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{u\to 1^+}[2\sqrt{x-1}]_u^3=2\sqrt{2}$

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

36. $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta\sin\theta+(1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos^2\theta-(1+\sin\theta)\sin\theta}=\frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin\theta)}=0$

에서 $\cos\theta=0$ 또는 $1+2\sin\theta=0$이므로 $\theta=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6},-\frac{5\pi}{6}$

그러나 $\theta=-\frac{\pi}{2}$이면 분모가 0이므로 접선의 기울기가 0인 모든 θ_0의 값의 합은 $-\frac{\pi}{2}$

37. 점 P,Q,R,S을 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피 V는 세 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$을 세 변으로 가지는 평행육면체 부피의 1/6배 이다. $\overrightarrow{PQ}=<1,1,1>$, $\overrightarrow{PR}=<5,2,-2>$, $\overrightarrow{PS}=<5,4,-1>$ 이고

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}=\begin{vmatrix}1&1&1\\5&2&-2\\5&4&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-3&-7\\0&-1&-6\end{vmatrix}=11$$

세 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$로 결정되는 평행육면체의 부피를 W이라 하면 $W=\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right|=11$이고 $V=\frac{1}{6}W=\frac{11}{6}$

38. 우선 $\nabla f(x,y,z)=<ky^2\sin z,\ 2kxy\sin z,\ kxy^2\cos z>$이므로 $\nabla f(1,1,0)=<0,0,k>$이다. $\|\vec{v}\|=\sqrt{6}$이므로 벡터 $\vec{v}$방향으로의 단위 벡터는 $\vec{u}=<\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}>$이고

$$D_{\vec{u}}f(1,1,0)=\nabla f(1,1,0)\cdot\vec{u}=-\frac{1}{\sqrt{6}}k=-\frac{\sqrt{6}}{6}k$$

그러므로 $-\frac{\sqrt{6}}{6}k=\sqrt{6}$에서 $k=-6$

39. 네 평면 $x+2y+z=a$, $x=2y$, $x=0$, $z=0$으로 둘러싸인 입체를 E라고 하면

$$E=\left\{(x,y,z)|0\le x\le\frac{a}{2},\ \frac{x}{2}\le y\le\frac{a}{2}-\frac{x}{2},0\le z\le a-x-2y\right\}$$

이므로 부피 $V(E)$는

$$V(E)=\int_0^{\frac{a}{2}}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{a}{2}-\frac{x}{2}}\int_0^{a-x-2y}1\,dzdydx=\int_0^{\frac{a}{2}}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{a}{2}-\frac{x}{2}}(a-x-2y)dydx$$

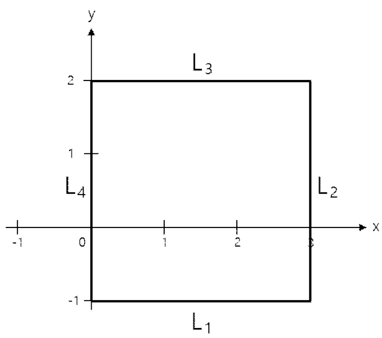
$$=\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{4}a^2-ax+x^2\right)dx=\frac{1}{24}a^3$$

에서 $\frac{1}{24}a^3=\frac{8}{3}$이므로 $a=4$

40. 우선 $f_x=2x-2y$, $f_y=-2x+3$이므로 임계점은 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$이다. 또한

$f_{xx}=2$, $f_{xy}=-2$, $f_{yy}=0$이므로 $D\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=-4<0$이므로 $f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$은 극값이 아니다.

한편, 아래 그림과 같이



(i) 직선 L_1에서 $y=-1$이므로 $f(x,-1)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$ 이고 $0\le x\le 3$에서 최댓값은 12, 최솟값은 -3

(ii) 직선 L_2에서 $x=3$이므로 $f(3,y)=9-3y$이고 $-1\le y\le 2$에서 최댓값은 12, 최솟값은 3

(iii) 직선 L_3에서 $y=2$이므로 $f(x,2)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$이고 $0\le x\le 3$에서 최댓값은 6 최솟값은 2

(iv) 직선 L_4에서 $x=0$이므로 $f(0,y)=3y$이고 $-1\le y\le 2$에서 최댓값은 6 최솟값은 -3

따라서, $M=12$, $m=-3$이고 $M+m=9$

41. $3x=u$, $2y=v$라고 하자. 그러면 $x=\frac{u}{3}$, $y=\frac{v}{2}$이고 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{6}$

또한 $D^*=\{(u,v)|u^2+v^2\le a\}$이므로

$$\iint_D(x^2+3y)dA=\frac{1}{6}\iint_{D^*}\left(\frac{u^2}{9}+\frac{3}{2}v\right)dA=\frac{1}{6}\int_0^{\sqrt{a}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3\cos^2\theta}{9}+\frac{3r^2}{2}\sin\theta\right)d\theta dr$$
$$=\frac{\pi}{54}\int_0^{\sqrt{a}}r^3dr=\frac{a^2}{216}\pi$$

그러므로 $\frac{a^2}{216}\pi=\frac{8}{27}\pi$에서 $a=8$

42. 곡선 C는 시계 방향이므로 곡선 $-C$가 시계 반대 방향이다. 곡선 $-C$로 둘러싸인 영역을 D라 하고 $P=3x^4, Q=xy$라 하면 $\frac{\partial Q}{\partial x}=y$, $\frac{\partial P}{\partial y}=0$이므로 그린정리에 의하여

$$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{-C}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\iint_D ydA=-\int_0^1\int_0^{1-x}ydydx=-\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=-\frac{1}{6}$$

43. $f_x=2x$, $f_y=2y$이므로 중심이 원점이고 반지름이 3인 원을 D라고 하면 곡면의 넓이 $A(S)$는

$$A(S)=\iint_D\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,drd\theta=\frac{\pi}{6}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1)$$

44. 포물 기둥 $z=1-x^2$과 세 평면 $z=0$, $y=0$, $y+z=2$으로 둘러싸인 영역을 E라고 하면 $\partial E=S$이고 S는 네 개의 곡면으로 이루어져 있다. 여기서

$E=\{(x,y,z)|-1\le x\le 1,\ 0\le z\le 1-x^2,\ 0\le y\le 2-z\}$

이고 $div\vec{F}=P_x+Q_y+R_z=3y+4y=7y$

이므로 발산정리(가우스정리:divergence theorem)에 의하여

$$\iint_S\vec{F}\cdot d\mathrm{S}=\iiint_E div\vec{F}\,dV=\iiint_E 7y\,dV=7\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z}y\,dydzdx$$
$$=\frac{7}{2}\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}(2-z)^2dzdx=-\frac{7}{6}\int_{-1}^1((x^2+1)^3-8)dx$$
$$=-\frac{7}{3}\int_0^1(x^6+3x^4+3x^2-7)dx=\frac{184}{15}$$

45. 문제의 행렬을 A라고 하자. 주어진 특성방정식의 세 근(고윳값)의 합은 15이고 이는 곧 $tr(A)$이므로 $15=tr(A)=5+3+a$이다. 따라서 $a=7$

46. $(x_1,x_2,x_3)=c_1(1,1,0)+c_2(1,0,1)+c_3(0,1,1)$이라 하면 $c_1+c_2=x_1$, $c_1+c_3=x_2$, $c_2+c_3=x_3$이고

$c_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3)$, $c_2=\frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3)$, $c_3=\frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3)$

따라서 $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_3\,,\,-2x_1+3x_2+x_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$이므로 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&3&1\end{pmatrix}$이고

A의 모든 성분의 합은 5

47. $AB=2A^2-A+E$ 이므로 $B=2A-E+A^{-1}$이다. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{pmatrix}$이고

$B=2A-E+A^{-1}=\begin{pmatrix}-39 & 20 & 15\\ 17 & 4 & 3\\ 7 & -2 & 14\end{pmatrix}$ 이므로 $\mathrm{tr}(B)=-21$

48. $y^2dy=\sin(\ln x)dx$이고 변수분리형이다. 일반해는 $\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{2}x\sin(\ln x)-\frac{1}{2}x\cos(\ln x)+C$

$y(1)=1$이므로 $C=\frac{5}{6}$이고 미분방정식의 해는 $y^3=\frac{3}{2}x\sin(\ln x)-\frac{3}{2}x\cos(\ln x)+\frac{5}{2}$ 이고

$y^3(e^{\pi/3})=\frac{3\sqrt{3}-3}{4}e^{\pi/3}+\frac{5}{2}$

49. 미분방정식 $x^3y'''+5x^2y''+7xy'+8y=0$의 보조방정식은

$m(m-1)(m-2)x^{m-3}+5m(m-1)x^m+7mx^m+8x^m=0$이고 해는 $m=-2,\ m=-2i,\ m=2i$이다.

따라서 일반해는 $y=C_1x^{-2}+C_2\cos(2\ln x)+C_3\sin(2\ln x)$. 조건으로부터 $C_1=1,\ C_2=e^{\pi},\ C_3=e^{-\pi}$이고

특수해는 $y=x^{-2}+e^{\pi}\cos(2\ln x)+e^{-\pi}\sin(2\ln x)$. 따라서 $y(e^{-\pi/8})=e^{\pi/4}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi}$

50. 계수행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$의 특성방정식

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ -1/2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=0$$

의 해는 $\lambda_1=1+i,\ \lambda_2=\overline{\lambda_1}=1-i$이고 λ_1에 대응하는 고유벡터는 $K=\begin{pmatrix}2\\ i\end{pmatrix}$이다.

$$B_1=\frac{1}{2}(K+\overline{K})=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix},\quad B_2=\frac{i}{2}(K-\overline{K})=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

라 하면 일반해는 다음과 같다.

$$X=(B_1\cos t+B_2\sin t)e^t+(B_2\cos t-B_1\sin t)e^t=c_1\begin{pmatrix}2\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix}-2\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}e^t$$

$X(0)=\begin{pmatrix}2c_1\\ -c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ 이므로 $X(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}2\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}e^t$이고 따라서 $X\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}2e^{\pi/2}\\ -(1/2)e^{\pi/2}\end{pmatrix}$