수학 가이드 답안지 [자연계열] < 오전 > (문항별 5점)

31. $\lim_{x\to -2}$ (분모)$=0$ 이므로 $\lim_{x\to -2}$(분자)$=0$ 이다. $\lim_{x\to -2}(1-\sqrt{x+a})=0$ 에서 $1-\sqrt{-2+a}=0$이고 $a=3$.

$$b=\lim_{x\to -2}\frac{1-\sqrt{x+3}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(1-\sqrt{x+3})(1+\sqrt{x+3})}{(x+2)(1+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to -2}\frac{-(x+2)}{(x+2)(1+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to -2}\frac{-1}{1+\sqrt{x+3}}=-\frac{1}{2}.$$

따라서 $ab=-\frac{3}{2}$

32. $f'(x)=a(x+1)(x-1)$ $(a<0)$이므로

$$f(x)=\int a(x+1)(x-1)dx=\int a(x^2-1)dx=a\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+C$$

(단, C는 적분상수이다.) 여기서

$$\begin{cases} f(-1)=a\left(-\frac{1}{3}+1\right)+C=-4 \\ f(1)=a\left(\frac{1}{3}-1\right)+C=0 \end{cases}$$

을 얻고 $a=-3$, $C=-2$이므로 $f(x)=-x^3+3x-2$이다. 따라서 $f(3)=-20$

33. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{3\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)\frac{3}{n}$

$$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=3\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=3\int_1^2\sqrt{x}\,dx=4\sqrt{2}-2$$

34. ㄱ. $\int_0^3\frac{1}{x-3}dx=\lim_{t\to 3-}[\ln|x-3|]_0^t=-\infty$

ㄴ. $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{t\to\infty}[2\sqrt{x}]_1^t=\infty$

ㄷ. $\int_1^\infty\frac{2+e^{-x}}{x}dx\ge\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=\infty$

ㄹ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec x\,dx=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}[\ln|\sec x+\tan x|]_0^t=\infty$

35. ㄱ. $\int_2^\infty\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{t\to\infty}[\ln(\ln x)]_2^t=\infty$이므로 발산 (적분판정법)

ㄴ. $a_n=\frac{3^n}{n!}$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0$이므로 절대수렴하고 따라서 수렴

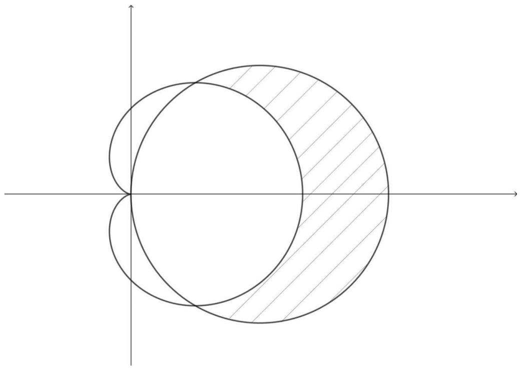
ㄷ. $a_n=\frac{n^n}{n!}$이라 하면, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$이므로 발산

ㄹ. $n>e$에 대하여 $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$이고 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=\infty$이므로 발산

ㅁ. $\left|\frac{\cos(n!)}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ 이고 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}<\infty$이므로 수렴

36. 두 곡선의 교점을 구하면 $3\cos\theta = 1+\cos\theta$에서 $\theta = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$이고 $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ 에서

$3\cos\theta \ge 1+\cos\theta$이므로 영역의 넓이 A는



$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (3\cos\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos\theta)^2 d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (8\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta) d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 + 4\cos 2\theta - 2\cos\theta) d\theta = \pi$$

37. $\overrightarrow{PQ} = <-4,-3,-14>$, $\overrightarrow{PR} = <0,-10,-10>$ 이고 $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -3 & -14 \\ 0 & -10 & -10 \end{vmatrix} = -10 <11,4,-4>$이다.

삼각형 PQR 의 넓이를 S라 하면 $S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = 5\sqrt{(11)^2 + (4)^2 + (-4)^2} = 15\sqrt{17}$

38. $\nabla f(x,y) = <2xy^4 - 4y^2, 4x^2y^3 - 8xy>$이므로 $\nabla f(1,-1) = <-2,4>$이다.

$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2}$ 이므로 벡터 $\vec{v}$방향으로의 단위 벡터는 $\vec{u} = \left\langle \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\rangle$이고

$2 = D_{\vec{u}} f(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot \vec{u} = \frac{-2a+4b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 그러므로 $\sqrt{a^2+b^2} = -a+2b$이고 따라서 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

39. 곡면 $x = y^2$과 세 평면 $x = z$, $z = 0$, $x = 1$로 둘러싸인 입체를 E라고 하면

$$E = \{(x,y,z) | -1 \le y \le 1, y^2 \le x \le 1,\ 0 \le z \le x\}$$

이므로 부피 $V(E)$는

$$V(E) = \iiint_E 1 dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x 1 dz dx dy = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x dx dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-y^4) dy = \frac{4}{5}$$

40. $f_x = -2xe^y$, $f_y = (2y + y^2 - x^2)e^y$이므로 $f_x = 0$, $f_y = 0$에서 $(0,0)$, $(0,-2)$는 임계점이다.

한편 $f_{xx} = -2e^y, f_{xy} = -2xe^y, f_{yy} = (2+4y+y^2-x^2)e^y$이다.

(i) $(0,0)$: $f_{xx}(0,0) = -2 < 0, D(0,0) = -2 \times 2 - 0 = -4 < 0$ 극값이 아니다.

(ii) $(0,-2)$: $f_{xx}(0,-2) = -2e^{-2} < 0, D(0,-2) = 4e^{-4} > 0$이므로 $f(0,-2) = 4e^{-2}$은 극댓값이다.

그러므로 옳은 것의 개수는 2

41. $u = 2x + 3y$, $v = x - 3y$라고 하자. 그러면 $x = \frac{u+v}{3}, y = \frac{u-2v}{9}$이고

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9}$$

또한 $D^* = \{(u,v) | 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 1\}$이므로

$$\iint_D (x-3y-1)e^{2x+3y}\cos(x-3y) dA = \frac{1}{9}\iint_{D^*} (v-1)e^u \cos v dA$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^1 \int_0^3 (v-1)e^u \cos v du dv = \frac{e^3-1}{9}(\cos 1 - 1)$$

42. 곡선 C로 둘러싸인 영역을 D라 하자. $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$, $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$이므로 그린정리(Green's theorem)에 의하여

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\int_{x^2}^x (1-2xy)dydx=\int_0^1 (x-x^3-x^2+x^5)dx=\frac{1}{12}$$

43. $T_u=(\cos v,\sin v,2u)$, $T_v=(-u\sin v,u\cos v,2v)$ 이므로 $\vec{n}=(T_u\times T_v)(1,0)=<-2,0,1>$이고

접평면의 방정식은 $z=2x-1$

44. 곡선 C는 원기둥과 평면이 만나서 이루는 교선인 타원이다. 곡선 C는 위에서 봤을 때 방향이 시계 방향이므로 $-C$가 시계 반대 방향이다.

$$\mathrm{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -y^2&x&z^2\end{vmatrix}=<0,0,1+2y>$$

이므로 곡선 $-C$로 둘러싸인 곡면을 S라고 S의 xy-평면 위로의 사영을 D라고 하면

스토크정리(Stoke's theorem)에 의하여

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}&=-\int_{-C}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\iint_S curl\vec{F}\cdot d\vec{\mathrm{S}}\\ &=-\iint_D (1+2y)dA\\ &=-\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\theta)rdrd\theta=-\pi\end{aligned}$$

45. $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&4\\2&3\end{pmatrix}$이 존재므로 $B=A-E-4A^{-1}$이다. $B=\begin{pmatrix}-2&-8\\-4&0\end{pmatrix}$이고 모든 성분의 합은 -14

46. 직선 $y=-x$에 대하여 반사시키는 행렬은 $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$이고 y축에 대하여 반사시키는 행렬은 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$

이므로 구하는 선형변환 T의 표준행렬은 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

47. $\begin{vmatrix}5&0&0&-5\\4&-3&-3&1\\2&3&-1&2\\-2&1&0&3\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\4&-3&-3&1\\2&3&-1&2\\-2&1&0&3\end{vmatrix}=5\left\{\begin{vmatrix}-3&-3&1\\3&-1&2\\1&0&3\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}4&-3&-3\\2&3&-1\\-2&1&0\end{vmatrix}\right\}=25$

48. $x=e^t$라 다음과 같은 상수계수 비동차 선형 미분방정식 $\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+9y=2e^{3t}$이 된다.

보조해는 $y_c=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}$이고 특수해는 $y_p=t^2e^{3t}$이다. 미분방정식 $x^2y''-5xy'+9y=2x^3$의

일반해는 $y=c_1x^3+c_2x^3\ln x+x^3(\ln x)^2$. 조건으로부터 $y(x)=2x^3-2x^3\ln x+x^3(\ln x)^2$이고 $y(e^2)=2e^6$

49. 우선 동차 미분방정식 $y''-y=0$의 일반해 즉 $y''-y=e^{-2x}\sin(e^{-x})$의 보조해는

$y_c=c_1e^{-x}+c_2e^x$이므로 특수해를 $y_p=u_1e^{-x}+u_2e^x$라 하자.

$$W=\begin{vmatrix}u_1&u_2\\u_1'&u_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{-x}&e^x\\-e^{-x}&e^x\end{vmatrix}=1-(-1)=2,$$

$$W_1=\begin{vmatrix}0&e^x\\e^{-2x}\sin(e^{-x})&e^x\end{vmatrix}=-e^{-x}\sin(e^{-x}),\quad W_2=\begin{vmatrix}e^{-x}&0\\-e^{-x}&e^{-2x}\sin(e^{-x})\end{vmatrix}=e^{-3x}\sin(e^{-x})$$

이고

$$u_1=\int\frac{W_1}{W}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin(e^{-x})dx=-\frac{1}{2}\cos(e^{-x}),$$

$$u_2=\int\frac{W_2}{W}dx=\frac{1}{2}\int e^{-3x}\sin(e^{-x})dx=\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(e^{-x})-e^{-x}\sin(e^{-x})-\cos(e^{-x})$$

이므로 특수해는 $y_p=-\sin(e^{-x})-e^x\cos(e^{-x})$이고 일반해는 $y=c_1e^{-x}+c_2e^x-\sin(e^{-x})-e^x\cos(e^{-x})$.

조건으로부터 $y=\frac{2}{3\pi^2}e^{-x}+\frac{1}{3}e^x-\sin(e^{-x})-e^x\cos(e^{-x})$이므로 $y(-\ln 2\pi)=\frac{1}{\pi}$

50. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\cos 2t+2\sin 2t.$ $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$