수학 가이드 답안지 [자연계열] < 오후 > (문항별 5점)

31. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=1$에서 $\lim_{x\to1}f(x)=3$이고 f는 연속함수이므로 $f(1)=3$이다. 또한 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)+2}{x-1}=2$에서

$\lim_{x\to1}g(x)=-2$이고 g는 연속함수이므로 $g(1)=-2$이다. 또한

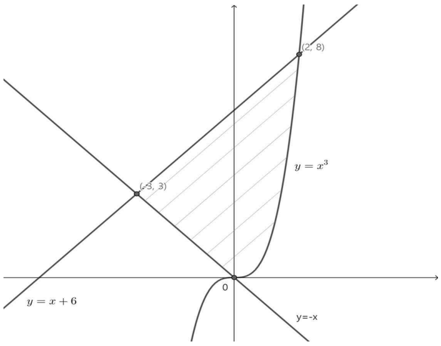
$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=1$이고 $g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)+2}{x-1}=2$

그러므로 $h(x)=f(x)g(x)$에서 $h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=1(-2)+3\times2=4$

32. $f'(x)=-6x^2+2ax-12$, $f(2)=6$, $f'(2)=0$에서 $-16+4a-24+b=6$, $-24+4a-12=0$

$\therefore a=9$, $b=10$ $\therefore a+b=19$

33. 곡선의 넓이는 $A=\int_{-3}^{0}(x+6-(-x))dx+\int_{0}^{2}(x+6-x^3)dx=19$



34. $V=\pi\int_{-1}^{1}((1+\sqrt{1-y^2})^2-1)dy=2\pi\int_{0}^{1}(2\sqrt{1-y^2}+1-y^2)dy=2\pi\left[\int_{0}^{1}2\sqrt{1-y^2}\,dy+\int_{0}^{1}(1-y^2)dy\right]$

$=\pi^2+\frac{4}{3}\pi$

35. $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|2x-3|}{7}<1$ 에서 $|2x-3|<7$ 이므로 $-2<x<5$이다.

$x=5$이면 $a_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$이고 교대급수 판정법에 의해 수렴

$x=-2$이면 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$이고 p-급수 판정법에 의해 발산.

그러므로 수렴하는 구간은 $-2<x\le5$이고 정수의 개수는 7

36. 곡선의 둘레는 $0 \le \theta \le 2\pi$에서 나타나므로 둘레의 길이 L은

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2+2\sin\theta)^2 + 4\cos^2\theta}\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\sin\theta}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{2|\cos\theta|}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\, d\theta - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\, d\theta + 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{2-2\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= -4(2-2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4(2-2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - 4(2-2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 16$$

37. $\overrightarrow{PQ} = <4,2,2>$, $\overrightarrow{PR} = <4,3,-2>$, $\overrightarrow{PS} = <5,5,0>$ 이고

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

세 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$로 결정되는 평행육면체의 부피를 V라 하면

$V = |\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}| = 30$ 이고 사면체의 부피는 $\frac{1}{6}V = 5$

38. $\nabla f(x,y) = <e^y, xe^y>$이므로 $\nabla f(2,0) = <1,2>$이다. $\overrightarrow{PQ} = <-\frac{3}{2}, 2>$ 방향의

단위 벡터는 $\vec{u} = <-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}>$이고 $D_{\vec{u}} f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \vec{u} = 1$

39. E의 xy-평면으로의 정사영을 D라고 하자. 그러면

$$\frac{16}{5}\pi = \iiint_E (x^2+y^2)\, dV = \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a} (x^2+y^2)\, dz\right] dA = \iint_D (x^2+y^2)(a-\sqrt{x^2+y^2})\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3(a-r)\, dr\, d\theta = \frac{a^5}{10}\pi$$

이다. 그러므로 $a^5 = 32$에서 $a = 2$

40. $f_x = -2x, f_y = 4-2y$이므로 $f_x = 0$, $f_y = 0$에서 임계점은 $(0,2)$이다. 한편

$f_{xx} = -2, f_{xy} = 0, f_{yy} = -2$이다.

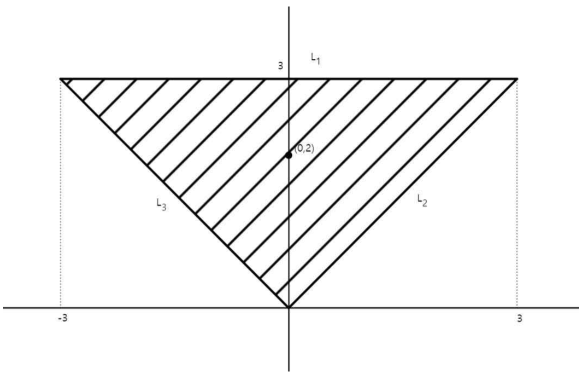
(i) $f_{xx}(0,2) = -2 < 0$, $D(0,2) = f_{xx}(0,2)f_{yy}(0,2) - f_{xy}^2(0,2) = 4 > 0$ 이므로 $f(0,2) = 4$은 극댓값이다.

(ii) $L_1 = \{(x,3) | -3 \le x \le 3\}$에서 $f(x,0) = 3 - x^2$이므로 최댓값은 3이고 최솟값은 -6이다.

(iii) $L_2 = \{(x,x) | 0 \le x \le 3\}$에서 $f(x,x) = 4x - 2x^2$이므로 최댓값은 2과 최솟값은 -6이다.

(iv) $L_3 = \{(x,-x) | -3 \le x \le 0\}$에서 $f(x,-x) = -4x - 2x^2$이므로 최댓값은 2이고 최솟값은 -6이다.

(i)-(iv)로 부터 $M = 4$, $m = -6$이고 $M + m = -2$



단국대학교
DANKOOK UNIVERSITY

41. $x=\sqrt{2}\,u-\sqrt{\frac{2}{3}}\,v,\ y=\sqrt{2}\,u+\sqrt{\frac{2}{3}}\,v$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}2&=x^2-xy+y^2\\&=(\sqrt{2}\,u-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,v)^2-(\sqrt{2}\,u-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,v)(\sqrt{2}\,u+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,v)+(\sqrt{2}\,u+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,v)^2\\&=2(u^2+v^2)\end{aligned}$$

이므로 $D^*=\{(u,v)|u^2+v^2\le 1\}$이다. 또한

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\\ \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}}\end{vmatrix}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

이므로

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\frac{8}{\sqrt{3}}\iint_{D^*}(u^2+v^2)\,dA=\frac{8}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$$

42. C_4를 $(4,0)$부터 $(0,0)$의 직선이라고 하자. 곡선 $\tilde{C}=C\cup C_4$를 라고 하면 $\tilde{C}$는 단순폐영역이다.

$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$이므로 $\int_{\tilde{C}}\vec{F}\bullet d\vec{r}=0$ 이다. 곡선 $-C_4$의 매개변수표현은 $c:[0,4]\to R^2,\ c(t)=(t,0)$이므로

$$\begin{aligned}\int_C\vec{F}\bullet d\vec{r}&=\int_{\tilde{C}}\vec{F}\bullet d\vec{r}-\int_{C_4}\vec{F}\bullet d\vec{r}=-\int_{C_4}\vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_{-C_4}\vec{F}\bullet d\vec{r}\\&=\int_0^4(3,t^2+1)\cdot(1,0)\,dt=\int_0^4 3\,dt=12\end{aligned}$$

43. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\theta & r\cos\theta\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\sin\theta,\ \frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\cos\theta$

이므로 곡면의 넓이

$$Area(S)=\iint_D\|T_r\times T_\theta\|\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,dr=\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$$

44. 곡선 C는 원기둥과 평면이 만나서 이루는 교선인 타원이다. 곡선 C의 방향은 위에서 봤을 때 시계 반대 방향이고

$$curl\vec{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y^3 & x^3 & -z^3\end{vmatrix}=<0,0,3(x^2+y^2)>$$

곡선 C로 둘러싸인 곡면을 S라고 S의 xy-평면 위로의 사영을 D라고 하면
스토크정리(Stoke’s theorem)에 의하여

$$\begin{aligned}\int_C\vec{F}\bullet d\vec{r}&=\iint_S curl\vec{F}\bullet d\vec{\mathrm{S}}\\&=3\iint_D(x^2+y^2)\,dA\\&=3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta=24\pi\end{aligned}$$

45. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-17 & 7 & 6\\ 3 & -2 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$이 존재하므로 $B=A-3E+A^{-1}=\begin{pmatrix}-19 & 8 & 11\\ 3 & -6 & 0\\ 6 & 3 & 9\end{pmatrix}$이다. $\det B=1305$

46. $x^2-5x+2=2(x^2-x)-3(x-1)-(x^2+1)$이므로

$T(x^2-5x+2)=2(x-2)-3(x^2-x)-(x^2-1)=-4x^2+5x-3$

따라서 $\alpha+\beta+\gamma=-2$

47. n차 정사각행렬 M에 대하여 $(kM)^t=kM^t$, $\det(kM)=k^n\det M$이고 $\det M^t=\det M$이다.

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\3&4&2&2\\-1&2&2&1\\1&2&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&-2&-1&-1\\0&4&3&2\\0&0&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-1&-1\\4&3&2\\0&2&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1&1\\0&1&0\\0&2&-2\end{vmatrix}=4$$

이므로 $\det[(2A)^t]=2^4\det A^t=2^4\det A=2^6=64$

48. $x=e^t$라 하면 주어진 미분방정식은

$$\frac{d^2y}{dt^2}-y=e^t$$

이다. 보조해는 $y_c=c_1e^{-t}+c_2e^t$이고 특수해는 $y_p=\frac{1}{2}te^t$이다. 따라서 미분방정식의 일반해는

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^t+\frac{1}{2}te^t=\frac{c_1}{x}+c_2x+\frac{1}{2}x\ln x$$

이다. 조건으로부터 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x\ln x$이고 $y(e^2)=\frac{3}{2}e^2$

49. 동차 미분방정식 $y''-2y'+y=0$의 보조해는 $y_c=c_1e^x+c_2xe^x$이이므로 특수해를 $y_p=u_1e^x+u_2xe^x$라 하자.

$$W=\begin{vmatrix}u_1&u_2\\u_1'&u_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^x&xe^x\\e^x&(x+1)e^x\end{vmatrix}=(x+1)e^{2x}-xe^{2x}=e^{2x},$$

$$W_1=\begin{vmatrix}0&xe^x\\xe^x\ln x&(x+1)e^x\end{vmatrix}=-x^2e^{2x}\ln x,\quad W_2=\begin{vmatrix}e^x&0\\e^x&xe^x\ln x\end{vmatrix}=xe^{2x}\ln x$$

이므로

$$u_1=\int\frac{W_1}{W}dx=-\int x^2\ln x\,dx=-\frac{1}{3}x^3\ln x+\frac{1}{9}x^3\text{이고}$$

$$u_2=\int\frac{W_2}{W}dx=\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$$

이고 특수해는 $y_p=\left(-\frac{1}{3}x^3\ln x+\frac{1}{9}x^3\right)e^x+\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right)xe^x$이다. 그러므로

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{1}{6}x^3e^x\ln x-\frac{5}{36}x^3e^x$$

조건으로부터 $y=-\frac{1}{9}e^x+\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{6}x^3e^x\ln x-\frac{5}{36}x^3e^x$이므로 $y(2)=\left(\frac{4}{3}\ln 2-\frac{13}{18}\right)e^2$

50. $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+4\sqrt{5}}{s^2+5}\right\}=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{5})^2}\right\}+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{s^2+(\sqrt{5})^2}\right\}=3\cos\sqrt{5}t+4\sin\sqrt{5}t$$

$$=5\sin(\sqrt{5}t+\gamma)$$

$\alpha=5$, $\beta=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ 에서 $\alpha\beta^2=4\pi^2$