수학 가이드 답안지 [자연계열] Ⓐ 형 (문항별 5점)

31. $y=f(x)=\tan\left(\frac{\pi x^2}{4}\right)$, $f'(1)=\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이므로 점 $(1,1)$에서의 접선은 $y=\pi x-\pi+1$이다.
따라서 y절편은 $-\pi+1$이다.

32. ㄱ. 식을 변형하면 $y=\frac{2x^3+3x^2-x-5}{x^2-1}=2x+3+\frac{x-2}{x^2-1}(x\neq\pm 1)$이므로 $y=2x+3$은 경사점근선이다.

ㄴ. $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ -1, & x\geq 0\end{cases}$는 $x=0$에서 연속이 아니지만 $f+g$, fg는 연속함수이다.

ㄷ. $f(x)$는 연속함수이고, a가 정수가 아니면 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 $(f\circ g)(x)$는 $x=a$에서 연속함수이다. 또한 정수 a에 대하여,

$$\lim_{x\to a+}(f\circ g)(x)=f(\lim_{x\to a+}g(x))=f(0)=0 \quad \text{이고} \quad \lim_{x\to a-}(f\circ g)(x)=f(\lim_{x\to a-}g(x))=f(1)=0$$

이고 $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=0=(f\circ g)(a)$이므로 $(f\circ g)(x)$는 모든 실수에 대하여 연속이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$는 일대일 대응이고 미분가능함수이다. $f(0)=-1$이므로 $f^{-1}(-1)=0$이고
$f'(x)=3+2\sin x$. 따라서 $(f^{-1})'(-1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-1))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{3}$이다.

33. $$\int_1^e(\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2\Big]_1^e-2\int_1^e\ln x\,dx = e-2\Big[x\ln x-x\Big]_1^e = e-2$$

34. $$\begin{aligned}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{k}{x+2}\right)dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{k}{x+2}\right)dx\\ &=\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{x}{2}\right|-k\ln|x+2|\right]_0^t\\ &=\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{x}{2}}{(x+2)^k}\right|\right]_0^t\\ &=\lim_{t\to\infty}\left(\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{t^2+4}}{2}+\frac{t}{2}}{(t+2)^k}\right|-\ln\frac{1}{2^k}\right)\end{aligned}$$

이므로 극한값이 존재하는 실수 k의 값은 1뿐이고

$$\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{t^2+4}}{2}+\frac{t}{2}}{t+2}\right|-\ln\frac{1}{2}\right]=\ln 2$$

35. 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{n^n(x-2)^n}{3\times 7\times 11\times\cdots\times(4n-1)}$ 이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|x-2|}{(4n+3)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{|x-2|e}{4}$$

로부터 $\frac{|x-2|e}{4}<1$일 때 멱급수가 수렴한다. $1<\frac{4}{e}<2$ 이므로 $|x-2|<\frac{4}{e}$ 로부터 주어진 멱급수가 수렴하게 되는 정수 x는 $1,2,3$이므로 그 합은 6이다.

36. (넓이) $= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{3\pi}{2}$

37. 세 점 $P_1(2,1,-1)$, $P_2(-1,3,0)$, $P_3(3,2,-5)$을 지나는 평면의 방정식은 $9x+11y+5z=24$이다.
점 $A(-2,2,-6)$을 지나고 벡터 $u=<1,1,-2>$에 평행한 직선의 매개방정식은 $x=t-2,\ y=t+2, z=-2t-6$ 이므로, 평면 α와의 교점 B는 $B(3,7,-16)$이다 $(t=5)$. 따라서 $\overrightarrow{BA}=<-5,-5,10>$이고 $\overrightarrow{BP_2}=<-4,-4,16>$ 이므로 $\cos\theta = \frac{200}{5\sqrt{6}\times 12\sqrt{2}} = \frac{5}{9}\sqrt{3}$ 이다.

38. $\nabla f(x,y,z) = \langle \cos(yz), 2y-xz\sin(yz), -xy\sin(yz)\rangle$, $\nabla f(2,1,\pi) = \langle -1,2,0\rangle$이고 $v=<2,3,-6>$ 방향의 단위 벡터 u 는 $u = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right\rangle$이므로 구하는 방향도함수는 $D_u f(2,1,\pi) = \frac{4}{7}$ 이다.

39. $f_x = 4x^3-4y$, $f_y = 4y^3-4x$ 이므로 임계점은 $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$이고,
$D(x,y) = f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = 144x^2y^2-16$ 이다. 먼저 $D(0,0)=-16<0$이므로 $(0,0)$은 안장점이고,
$D(1,1)=D(-1,-1)=128>0$, $f_{xx}(1,1)=f_{xx}(-1,-1)=12>0$이므로 $f(1,1)=-2+a$ 과
$f(-1,-1)=-2+a$ 은 모두 극솟값이다. 그러므로 모든 극값의 합은 $2a-4$이고, $2a-4=-2$에서 $a=1$이다.

40. $\iint_R y\,dA = \int_0^1\int_{y^2-1}^{1-y^2} y\,dx\,dy = \int_0^1 y\Big[\ x\ \Big]_{y^2-1}^{1-y^2}dy = \int_0^1 (2y-2y^3)\,dy = \frac{1}{2}$

41. $\iiint_{B(a)}\left(\frac{2}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(\frac{2}{\rho^2}-\frac{2}{\rho}\right)\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 4\pi(2a-a^2)$
이므로 $a=1$일 때, 최댓값 4π를 갖는다.

42. $\operatorname{curl} F = 0$이므로 포텐셜 함수 $f(x,y,z)$가 존재한다. 사실, $f(x,y,z) = xe^y - ye^z + k$(단, k는 적분상수)
이고, 따라서 $\int_C F \cdot dr = f(x,y,z)\Big]_{(0,0,0)}^{(2,1,1)} = e$

43. 곡면 S로 둘러싸인 입체를 E라 할 때, 다이버전스 정리에 의하여

$$\iint_S F\cdot dS = \iiint_E (2x-6y+4z)\,dV = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{1+2x}^{2+2x}(2x-6y+4z)\,dz\right)dA$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le 1}(10x-6y+6)\,dA = 6\pi$$

44. ㄱ. $\operatorname{curl} r = \left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)k = 0$

ㄴ. $\operatorname{div} r = \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z} = 3$

ㄷ. $\operatorname{div}(rr) = \frac{\partial(rx)}{\partial x}+\frac{\partial(ry)}{\partial y}+\frac{\partial(rz)}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}x+\frac{\partial r}{\partial y}y+\frac{\partial r}{\partial z}z+3r$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}z + 3r = 4r$$

ㄹ. $\operatorname{curl}(\nabla r) = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 r}{\partial z\partial y}\right)i + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 r}{\partial y\partial x}\right)k = 0$

단국대학교
DANKOOK UNIVERSITY

45. $\det\left\{\begin{pmatrix}1 & 4\\1 & a\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}=\lambda^2-(a+1)\lambda+a-4=0$ 로부터 $a=-2$

46. $(2,4,-2)=k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+k_3\mathrm{v}_3=(k_1+k_2+k_3,\ k_1+k_2,\ k_1)$에서 $k_1=-2,\ k_2=6,\ k_3=-2$이므로

$T(2,4,-2)=T(-2\mathrm{v}_1+6\mathrm{v}_2-2\mathrm{v}_3)=-2T(\mathrm{v}_1)+6T(\mathrm{v}_2)-2T(\mathrm{v}_3)=(2,0)$

47. $\det A=-2-(2a-2)=-2a,\ \det B=b,\quad \det(AB)=\det(A)\det(B)=-2ab$ 이다.

$A+B=\begin{pmatrix}2 & a & -3\\0 & -1+b & 3\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$이므로 $\det(A+B)=-6$이다. 따라서 $-2ab=-6$으로 부터 $ab=3$이다.

48. $y\,dy=\dfrac{2x\,dx}{1+x^2}$ 으로부터 $\dfrac{y^2}{2}=\ln(1+x^2)+C$이고 원점을 지나므로 $C=0$. 따라서 $a=\sqrt{e^2-1}$

49. $x=e^t,\ z(t)=y(e^t)$라 하면 $\dfrac{d^2z}{dt^2}-3\dfrac{dz}{dt}+2z=3\sin 2t$ 이므로 일반해

$$z(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}-\frac{3}{20}\sin 2t+\frac{9}{20}\cos 2t$$

를 얻는다. 따라서 $t=\ln x$이므로 주어진 미분방정식의 일반해는

$$y=f(x)=c_1x+c_2x^2-\frac{3}{20}\sin(\ln x^2)+\frac{9}{20}\cos(\ln x^2)$$

이다. 조건 $f(1)=\dfrac{9}{20},\ f'(1)=-\dfrac{3}{10}$로 부터 $c_1=c_2=0$이므로

$$f(x)=-\frac{3}{20}\sin(\ln x^2)+\frac{9}{20}\cos(\ln x^2)$$

이다. 따라서 $f(e^{\pi})+f(e^{\pi/4})=\dfrac{9}{20}-\dfrac{3}{20}=\dfrac{3}{10}$이다.

50. $\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}(e^{-t}\cosh t)\mathcal{L}(\cos t)=\dfrac{s+1}{(s+1)^2-1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}=\dfrac{s+1}{(s+2)(s^2+1)}$