영어 정답표 [자연계열] Ⓐ 형

문제번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
정 답	①	②	①	①	④	②	①	②	④	③
배 점	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

문제번호	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
정 답	①	④	③	②	④	③	②	②	②	④
배 점	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

문제번호	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
정 답	②	①	④	①	①	④	①	④	③	②
배 점	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5

수학 정답표 [자연계열] Ⓐ 형 (문항별 5점)

문제번호	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
정 답	①	②	①	①	③	④	③	②	②	④
배 점	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

문제번호	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
정 답	③	④	③	②	①	②	④	④	③	①
배 점	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

31.

$$\frac{x+\sin x}{\sqrt{\sin x+x+1}-\sqrt{\sin^2 x+1}}=\frac{(x+\sin x)(\sqrt{\sin x+x+1}+\sqrt{\sin^2 x+1})}{\sin x-\sin^2 x+x}=\frac{(1+\frac{\sin x}{x})(\sqrt{\sin x+x+1}+\sqrt{\sin^2 x+1})}{\frac{\sin x}{x}-\sin x\frac{\sin x}{x}+1}$$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\sqrt{\sin x+x+1}-\sqrt{\sin^2 x+1}}=2.$

32. $f'(x)=1+e^x$이고 $g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{1+e^{g(a)}}=\frac{1}{2}$로부터 $g(a)=0$이다. $\therefore\ a=1$

33. $(\text{입체의부피})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi yx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi y\sin y\,dy=2\pi\left([-y\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy\right)=2\pi$

34.
$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^5e^{-x}dx&=[-e^{-x}x^5]_0^\infty+\int_0^\infty 5x^4e^{-x}dx\\&=5\int_0^\infty x^4e^{-x}dx\\&=5\cdot 4\int_0^\infty x^3e^{-x}dx\\&=5\cdot 4\cdot 3\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\int_0^\infty xe^{-x}dx=5!\int_0^\infty e^{-x}dx=120\end{aligned}$$

35. (1) $a_n=\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$이라 하면, $a_n^{1/n}=\frac{2n+3}{3n+2}\to\frac{2}{3}<1$이므로 거듭제곱판정법에 의하여 수렴.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 3n}{n^2+1}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$이므로 비교판정법에 의하여 수렴.

(3) $b_n=\frac{n^2}{n^3+1}$이라 하면, $b_{n+1}\le b_n$이고 $b_n\to 0$이므로 교대급수판정법에 의하여 수렴.

(4) $c_n=\frac{n^n}{n!}$이라 하면, $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e>1$이므로 비판정법에 의하여 발산.

36. $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ 이고 $\theta=\theta_0$인 점에서의 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$ 이므로

$\sin\theta_0+\sqrt{3}\cos\theta_0=\sqrt{3}$. 따라서 $2\sin(\theta_0+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$, $\theta_0=0,\ \frac{\pi}{3},\ 2\pi.\quad\therefore\ 0+\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$

37. $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}=<2,2,-2>$, $\vec{b}=\overrightarrow{PR}=<2,-2,2>$, $\vec{c}=\overrightarrow{PS}=<-2,2,2>$이므로 구하는 부피는

$$|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|=\left|\begin{vmatrix}-2&2&2\\2&2&-2\\2&-2&2\end{vmatrix}\right|=32$$

38. $F(x,y,z)=xe^y-z$라 하면 $\nabla F(x,y,z)=<e^y,xe^y,-1>$이므로 접평면에 수직인 벡터는 $<1,1,-1>$. 따라서 접평면의 방정식은 $(x-1)+y-(z-1)=0$. 그러므로 접평면과 yz평면이 만나서 생기는 직선의 방정식은 $z=y$ 이고 $a=1$, $b=0$. 한편 $<1,1,-1>\cdot<1,0,0>=\sqrt{3}\times 1\times\cos\theta$로부터 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore\ a+b+\cos\theta=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

39. D를 xy 평면에서 $x=0$, $y=x$, $x+y=2$로 이루어진 영역이라 하면 입체의 부피는

$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dA$$

이다. $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x\le y\le 2-x\}$ 이므로

$$V=\int_0^1\int_x^{2-x}(x^2+y^2)\,dydx=\int_0^1\left[2x^2-\frac{7x^3}{3}+\frac{(2-x)^3}{3}\right]dx=\frac{4}{3}$$

40. $f_x=3x^2-3y^2$, $f_y=-6xy+12y^2-6y-12$이므로 $f_x(x,y)=0=f_y(x,y)$ 로부터

4개의 임계점 $(-1,-1),(2,2),(-1,1),(\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$를 갖는다. $f_{xx}=6x$, $f_{xy}=-6y$, $f_{yy}=-6x+24y-6$

이므로 $D=f_{xx}\times f_{yy}-(f_{xy})^2$ 라 할 때,

$D(-1,1)<0$, $D(\frac{2}{3},-\frac{2}{3})<0$ 이고, $D(-1,-1)>0$, $f_{xx}(-1,-1)<0$, $D(2,2)>0$, $f_{xx}(2,2)>0$

이다. 따라서 $(-1,-1)$일 때 극대를 갖고, $(2,2)$일 때 극소를 갖는다. 그러므로 점 $(2,2)$가 극솟값을 갖는 점이다.

41. 라그랑즈 승수법에 의해서 적당한 실수 λ에 대하여 $24a^2=\lambda be^{ab}$, $3b^2=\lambda ae^{ab}$ 이다. 따라서 $2a=b$이고 $8a^3+b^3=16$이므로 $a=1,b=2$. $\therefore\ a+b=3$

42. 벡터장 $\mathrm{F}=a\mathrm{i}+b\mathrm{j}+c\mathrm{k}$ 의 포텐셜함수 f가 '$f(x,y,z)=ax+by+cz+$상수' 이므로 곡선 C의 시작점을 $\mathrm{P}=(p_1,p_2,p_3)$, 끝점을 $\mathrm{Q}=(q_1,q_2,q_3)$라 하면 선적분의 기본정리에 의하여

$$\int_C a\,dx+b\,dy+c\,dz=f(x,y,z)\Big]_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}=<a,b,c>\cdot<q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3>=0$$

이다. 따라서 벡터 $<a,b,c>$는 평면 $2x+y+2z=0$에 수직이다. 한편, 점 (a,b,c)가 곡면 S 위에 있으므로 $<a,b,c>=\pm<2,1,2>$이다. 따라서 $a(b+c)=6$.

43. Gauss 정리(Divergence 정리)에 의하여

$$\iint_S \mathrm{F}\cdot d\mathrm{S}=\iiint_E \nabla\cdot\mathrm{F}\,dV=\iiint_E 3\,dV=3\times(E\text{의 부피})=\frac{1}{2}.$$

44. $\nabla f=f_x\mathrm{i}+f_y\mathrm{j}+f_z\mathrm{k}$, $\nabla g=g_x\mathrm{i}+g_y\mathrm{j}+g_z\mathrm{k}$, $\nabla h=h_x\mathrm{i}+h_y\mathrm{j}+h_z\mathrm{k}$ 이므로

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{F}\,(1,1,1)=(h_y-g_z)\mathrm{i}-(h_x-f_z)\mathrm{j}+(g_x-f_y)\mathrm{k}=(1-2)\mathrm{i}-(2-3)\mathrm{j}+(3-2)\mathrm{k}=-\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}$$

45. $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & -1\\ 2 & \lambda-1 & 0\\ 2 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$에서 $\lambda=1,2,3$은 행렬 A의 고윳값이다. 따라서 행렬 A^5의 고윳값은 $1^5=1$, $2^5=32$, $3^5=243$이므로 구하는 값은 276.

46. 주어진 연립일차방정식을 풀면 $x_1=-s-t$, $x_2=s$, $x_3=-t$, $x_4=0$, $x_5=t$이므로

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

단국대학교
DANKOOK UNIVERSITY

이고 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$는 독립이므로 해공간의 기저가 된다. 따라서 해공간의 차원은 2차원.

47. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$라 하면 $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$에서

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 $a=1,\ b=1,\ c=3,\ d=3,\ e=-2,\ f=2,\ g=1,\ h=-1$. $\therefore\ abcd - efgh = 5$

48. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$이면 $\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$이므로 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{9s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(3s)^2+2^2}\right\} = \frac{1}{3}\cos\frac{2}{3}t$

$\therefore\ f(t) = \frac{1}{3}\cos\frac{2}{3}t$. 따라서 $f(t)$의 주기는 3π.

49. $y = ux$로 치환하면 $dy = udx + xdu$이므로 주어진 미분방정식은

$$x^2 e^u dx + x^3 u du = 0,\ ue^{-u} du = -\frac{1}{x}dx$$

부분적분법을 이용하여 적분하면 $ue^{-u} + e^{-u} = \ln|x| + C$ (단, C는 적분상수).

$u = \frac{y}{x}$를 다시 대입하면 일반해는 $\left(1 + \frac{y}{x}\right)e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$. 초기조건 $y(1) = 0$으로부터 $C = 1$.

$\therefore$ 해는 $\left(1 + \frac{y}{x}\right)e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + 1$

50. $y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$이고 $y_p = Ax\cos x + Bx\sin x + C\cos 2x + D\sin 2x$.

y_p를 주어진 미분방정식에 대입하면 $A = 2,\ B = 0,\ C = -\frac{8}{3},\ D = 0$. 따라서

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + 2x\cos x - \frac{8}{3}\cos 2x,$$
$$y' = -c_1\sin x + c_2\cos x + 2\cos x - 2x\sin x + \frac{16}{3}\sin 2x.$$

초기 조건으로부터 $c_1 = -\pi,\ c_2 = -\frac{11}{3}$이므로 $y = -\pi\cos x - \frac{11}{3}\sin x + 2x\cos x - \frac{8}{3}\cos 2x$.

$\therefore\ y(\pi) = -\pi - \frac{8}{3}$