# 수학 가이드 답안지 [자연계열] Ⓐ 형 (문항별 5점)

| 문제번호 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 정 답 | ① | ② | ③ | ① | ④ | ① | ④ | ① | ④ | ② |

| 문제번호 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 정 답 | ① | ③ | ② | ③ | ④ | ③ | ④ | ② | ③ | ② |

1. $2xy^2+2x^2yy'+y+xy'=0$으로부터 $y'=-\dfrac{2xy^2+y}{2x^2y+x}=-\dfrac{y}{x}$이다.

따라서 $b=2a$이고, $4a^4+2a^2=2a^2(2a^2+1)=2$로부터 $a^2=\dfrac{1}{2}$, $b^2=2$이다.

그러므로 $2a^2+b^2=3$이다.

2. $y=(2x+1)^{\cot 4x}$라 하자.

$\ln y=(\cot 4x)\ln(2x+1)=\dfrac{\ln(2x+1)}{\tan 4x}$

이므로 로피탈 정리에 의하여

$$\lim_{x\to 0+}\ln y=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(2x+1)}{\tan 4x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2}{2x+1}}{4\sec^2 4x}=\frac{1}{2}$$

따라서, $\lim\limits_{x\to 0+}(2x+1)^{\cot 4x}=\lim\limits_{x\to 0+}y=\lim\limits_{x\to 0+}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\ln y}=\sqrt{e}$ 이다.

3. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\,n^2}{n^4+k^4}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\,n^2}{n^4\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^4\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^4\right]}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x}{1+x^4}\,dx$$

이다. 따라서 $x^2=u$로 치환하면 $x\,dx=\dfrac{1}{2}du$이므로

$$\int_0^1\frac{x}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+u^2}\,du=\frac{1}{2}\Big[\tan^{-1}u\Big]_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$$ 이다.

4. $\sqrt{x}=t$로 치환하면 $dx=2t\,dt$ 이므로

$$\int_{4a^2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x-a^2)}\,dx=\int_{2a}^{\infty}\frac{2}{t^2-a^2}\,dt=\frac{1}{a}\left[\ln\frac{t-a}{t+a}\right]_{2a}^{\infty}=\frac{\ln 3}{a}=1$$

로부터 $a=\ln 3$이다.



단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

5. (넓이) $= 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(4\cos 2\theta)^2\, d\theta = 64\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\, d\theta = 32\left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 8\pi$

6. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$라 하면 $\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, -2z) = k(1, 4, 2)$로부터

$x = \frac{k}{2}$, $y = k$, $z = -k$이다.

$\frac{k^2}{4} + 2k^2 - k^2 = 5$로부터 $k = \pm 2$이고, 이 중 조건을 만족시키는 $k$의 값은 2이다.

따라서 $a = 1$, $b = 2$, $c = -2$이고, $d = 5$이다.

$a + b + c + d = 6$이다.

7. 자연수 $n$에 대하여 $a_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)\times(-3)^n}$라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+2)}{3(n+2)\ln(n+1)} = \frac{1}{3}$$

이므로, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-2)^n$의 수렴반경은 $r = 3$이다.

따라서 $|x-2| < 3$, 즉 $-1 < x < 5$인 $x$에 대하여 주어진 급수는 수렴하고,

$x < -1$ 또는 $x > 5$인 $x$에 대하여 주어진 급수는 발산한다.

한편, $x = -1$일 때, 주어진 급수는

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)\times(-3)^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

이고, $\frac{1}{n+1} < \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ $(n \geq 2)$이므로 비교판정법에 의하여 이 급수는 발산한다.

또한, $x = 5$일 때, 주어진 급수는

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)\times(-3)^n}3^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

이므로 교대급수판정법에 의하여 수렴한다.

따라서 주어진 급수가 수렴하게 되는 정수 $x$의 값은

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

이고, 이들의 합은 15이다.

8. 실수 $x\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$에 대하여

$$\tan^{-1}(2x) = (2x) - \frac{(2x)^3}{3} + \frac{(2x)^5}{5} - \frac{(2x)^7}{7} + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$

이므로, $f(x)$의 매클로린 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$는

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (2-1)x - \frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \frac{x^4}{4} + \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right)x^5 - \cdots$$

이다. 따라서 $a_5 = \frac{31}{5}$이다.

9. $f'(x)=\int_4^{x^2}\frac{x\sqrt{1+u^3}}{u^2}du$이고 $f''(x)=\int_4^{x^2}\frac{\sqrt{1+u^3}}{u^2}du+\frac{2\sqrt{1+x^6}}{x^2}$

이므로 $f''(2)=\frac{\sqrt{65}}{2}$이다.

10. $\mathrm{r}'(t)=-2\sin t\,\mathrm{i}+2\cos t\,\mathrm{j}+3\mathrm{k}$, $\|\mathrm{r}'(t)\|=\sqrt{13}$

단위접선벡터 $\mathrm{T}(t)$는 $\mathrm{T}(t)=-\frac{2}{\sqrt{13}}\sin t\,\mathrm{i}+\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathrm{j}+\frac{3}{\sqrt{13}}\mathrm{k}$이므로

$\mathrm{T}'(t)=-\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathrm{i}-\frac{2}{\sqrt{13}}\sin t\,\mathrm{j}$, $\|\mathrm{T}'(t)\|=\frac{2}{\sqrt{13}}$이다.

따라서 주단위법선벡터 $\mathrm{N}(t)$는 $\mathrm{N}(t)=-\cos t\,\mathrm{i}-\sin t\,\mathrm{j}$이고,

점 P에서의 주단위법선벡터는 $\mathrm{N}\left(\frac{\pi}{2}\right)=<a,b,c>=<0,-1,0>$이다.

한편, $\kappa=\frac{\|\mathrm{T}'(t)\|}{\|\mathrm{r}'(t)\|}=\frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=\frac{2}{13}$이므로

구하는 값은 $a+b+c+\kappa=0-1+0+\frac{2}{13}=-\frac{11}{13}$이다.

11. $\mathrm{F}=e^t\mathrm{i}+te^{t^3}\mathrm{j}+t^3e^{t^6}\mathrm{k}$, $d\mathrm{r}=(\mathrm{i}+2t\mathrm{j}+3t^2\mathrm{k})dt$이므로

$$\int_c \mathrm{F}\cdot d\mathrm{r}=\int_0^1\left(e^t+2t^2e^{t^3}+3t^5e^{t^6}\right)dt=\frac{13}{6}(e-1)$$

이다.

12. $\mathrm{F}=-2y\,\mathrm{i}+3x\,\mathrm{j}+10z\mathrm{k}$, $\mathrm{curl\,F}=5\mathrm{k}$, $\mathrm{n}=\mathrm{k}$ 이므로

$$\iint_R 5\,dA=5\times 25\pi=125\pi$$

이다.

13. $\mathrm{div\,F}=3z^2$이므로

$$\iint_S(\mathrm{F}\cdot\mathrm{n})ds=\iiint_D \mathrm{div\,F}\,dV$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}}3z^2r\,dzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left[rz^3\right]_0^{\sqrt{4-r^2}}drd\theta=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{5}(4-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\sqrt{3}}d\theta=\frac{62}{5}\pi$$

이다.

14. $5-4x+3x^2=-(x-x^2)+3(1-x)+2(1+x^2)$이므로

$T(5-4x+3x^2)=-(1+x)+3(x+x^2)+2(1+x^2)=1+2x+5x^2$

이다. 따라서 $a+b+c=8$이다.

15. $AB=A^2+2A+E$이므로 $B=A+2E+A^{-1}$이다.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-11 & -4 & 6\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$이고 $B=A+2E+A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & -2 & 10\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 4 & 9\end{pmatrix}$이므로 $B$의 모든 성분의 합은 20이다.

16. 부분공간의 원소 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$에 대하여

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

이므로 $b=d,\ c=g,\ f=h$이다. 따라서 구하는 차원은 $6$이다.

17. $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

이므로 $A$의 고윳값은 $-1, -2, 0$이다. 따라서 $A^2 - A + E$의 고윳값은

$(-1)^2 - (-1) + 1 = 3,\ (-2)^2 - (-2) + 1 = 7,\ 0^2 - 0 + 1 = 1$

이므로, 모든 고윳값의 합은 $11$이다.

18. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{e^t\} \cdot \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$

19. 주어진 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x}\right)y = \frac{2}{x}e^{-x}$$

따라서 적분인자 $\mu(x) = e^{\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx} = e^{x+2\ln|x|} = x^2e^x$, 즉 $\frac{d}{dx}[x^2e^xy] = 2x$이다.

그러므로 $x^2e^xy = x^2 + C$ 에서 $y = e^{-x} + \frac{C}{x^2}e^{-x}$(단, $C$는 상수)이다.

한편, $y(1) = 2e^{-1}$로부터, $C=1$이므로 해는 $y = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^{-x}$이고 구하는 값은

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{\sqrt{e}}$이다.

20. 특성방정식 $m^2 + 1 = 0$을 풀면 $m = \pm i$이므로 $y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$이다.

$W(Wronskian) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1,\ f(x) = \sec^3 x$에서

$u_1{}' = -\sin x\sec^3 x = -\frac{\sin x}{\cos^3 x},\ u_2{}' = \cos x\sec^3 x = \sec^2 x$이므로

$u_1 = -\frac{1}{2\cos^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{2},\ u_2 = \tan x$를 얻는다. 따라서 $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = \frac{1}{2}\sec x - \cos x$이므로 일반해는

$y = y_c + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}\sec x - \cos x = c_3\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}\sec x$이다.

한편, $y' = -c_3\sin x + c_2\cos x + \frac{1}{2}\sec x\tan x$이므로 초기조건으로 부터 $c_3 = c_2 = \frac{1}{2}$을 얻는다.

따라서 $y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sec x$이고 구하는 값은 $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$이다.