단국대학교 2022학년도 모의논술고사

자연계열 가이드답안

단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

☐ 출제의도

[논제 1] 유리함수의 특징을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 정적분과 부정적분 사이의 관계를 이해하고 있는지를 평가

[논제 3] 함수의 미분가능성의 개념을 이해하고 있는지를 평가

☐ 자료출처
○ 이준열 외(2020), 수학, 242-246쪽
○ 류희찬 외(2020), 수학II, 122-128쪽
○ 배종숙 외(2020), 수학II, 124-128쪽
○ 김원경 외(2020), 수학II, 112-118쪽

[논제 1 평가기준]
- 점 P 위치를 제시 : 8점
- 정답을 제시 : 7점

[논제 2 평가기준]
- $a=\frac{1}{3}$ 과 $b=\frac{2}{5}$ 를 제시 : 6점
- $\left(\frac{2}{ab}\right)^2\int_a^b(4-8t)g(t)dt=7$ 을 제시 : 6점
- $h(x)$를 제시 : 4점
- 정답을 제시 : 4점

[논제 3 평가기준]
- $g(t)$를 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] $\overline{AP} = \frac{1}{2}$ 이려면 점 P가 선분 AB 또는 선분 AC의 중점에 있어야 한다. 한편, $t=\frac{7}{15}$일 때 P의 위치는 $f(\frac{7}{15})=7$로 부터 △ABC의 변을 따라 시계 반대 방향으로 두 바퀴 돌고 B에 있을 때이므로 $\overline{AP} = \frac{1}{2}$ 이려면 $k=1,2,3$과 $m=1,2$에 대하여

$$\frac{t}{1-2t} = f(t) = 3(k-1)+\frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad \frac{t}{1-2t} = f(t) = 3(m-1)+\frac{5}{2}$$

이다. 따라서 $t=\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{16}, \frac{11}{24}, \frac{13}{28}$이다.

[논제 2] 조건 (2)의 양변을 x에 관하여 미분하면

$$h(x) = h(x) + xh'(x) - 180x^3 + 132x^2 - 24x$$

이다.

$$h'(x) = 12(3x-1)(5x-2) \quad \cdots\cdots ①$$

이고,

$$h(x) = 60x^3 - 66x^2 + 24x + C \ (C\text{는 적분상수}) \quad \cdots\cdots ②$$

이다. 식 ①로부터 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{5}$이다. 구간 $\frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{5}$에서 $g(t)$를 구하자.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1, \ f\left(\frac{2}{5}\right) = 2$$

이므로 점 P는 선분 BC 위에 있다. 따라서

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + f(t)\right) = \frac{4t-1}{4-8t}$$

이고,

$$\left(\frac{2}{ab}\right)^2 \int_a^b (4-8t)g(t)dt = 225\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{5}} (4t-1)dt = 7$$

이다. 그러므로 조건 (2)에서 $h(1)=10$을 얻고, 식 ②로 부터 $C=-8$ 이다. 결국 $h(-1)=-158$이다.

[논제 3] 먼저 닫힌구간 $\left[0, \frac{4}{9}\right]$에서 점 P가 점 A, B, C에 위치하는 시각은 각각

$$t = 0, \frac{3}{7}, \quad t = \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \quad t = \frac{2}{5}$$

이다. 이제 열린구간 $\left(0, \frac{4}{9}\right)$에서 $g(t)$를 구하자.

(1) 점 P가 선분 AB위에 있는 경우: t의 범위는 $0 < t \le \frac{1}{3}$과 $\frac{3}{7} \le t < \frac{4}{9}$이다. $0 < t \le \frac{1}{3}$에 대하여,

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}f(t)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}f(t)$$

이고 $\frac{3}{7} \le t < \frac{4}{9}$에 대하여,

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}(f(t)-3)\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}f(t)$$

(2) 점 P가 선분 BC 위에 있는 경우: t의 범위는 $\frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{5}$이다. 이 때

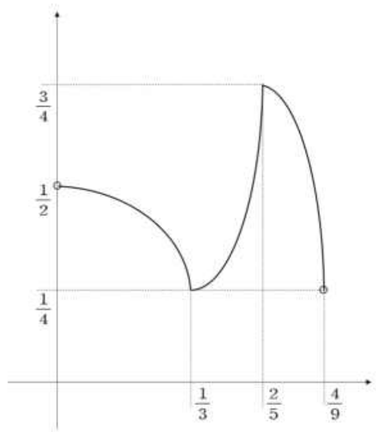
$$g(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + f(t)\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}f(t)$$

(3) 점 P가 선분 AC 위에 있는 경우: t의 범위는 $\frac{2}{5} \le t \le \frac{3}{7}$이다. 이 때

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}f(t)\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}f(t)$$

따라서,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x, & 1 \le x < 2 \\ \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x, & 2 \le x < 4 \end{cases}$$



라 할 때

$$g(t) = G(f(t)) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}f(t), & 0 < t < \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}f(t), & \frac{1}{3} \le t < \frac{2}{5} \\ \frac{5}{4} - \frac{1}{4}f(t), & \frac{2}{5} \le t < \frac{4}{9} \end{cases}$$

이다. 함수 $f(t)$는 열린구간 $\left(0, \frac{4}{9}\right)$에서 미분가능하고 $G(x)$는 $x = 1, 2$를 제외한 점에서 미분가능하므로 $g(t)$의 미분가능성은 $t = \frac{1}{3}$과 $t = \frac{2}{5}$에서만 조사하면 된다.

(i) $t = \frac{1}{3}$일 때,

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(\frac{1}{3} + h) - g(\frac{1}{3})}{h} = -\frac{1}{4}f'(\frac{1}{3}) \neq \frac{1}{2}f'(\frac{1}{3}) = \lim_{h \to 0+} \frac{g(\frac{1}{3} + h) - g(\frac{1}{3})}{h}$$

이므로 $t = \frac{1}{3}$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $t = \frac{2}{5}$일 때,

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(\frac{2}{5} + h) - g(\frac{2}{5})}{h} = \frac{1}{2}f'(\frac{2}{5}) \neq -\frac{1}{4}f'(\frac{2}{5}) = \lim_{h \to 0+} \frac{g(\frac{2}{5} + h) - g(\frac{2}{5})}{h}$$

이므로 $t = \frac{2}{5}$에서 미분가능하지 않다. 따라서 $g(t)$가 미분가능하지 않은 점은 $t = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 접선의 방정식의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 극값의 개념을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 권오남 외(2020), 수학II, 88-95쪽
○ 김원경 외(2020), 미적분, 49-57쪽, 75-84쪽, 96-105쪽
○ 박교식 외(2020), 미적분, 51-60쪽, 77-84쪽, 100-111쪽

[논제 1 평가기준]
- 접선의 방정식을 제시 : 5점
- 접선이 존재하기 위한 조건을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- 조건 (1)에 의하여 다항함수 $h(x)$가 이차 이하임을 설명 : 5점
- $h(x)$가 이차함수일 때 $F(x)$가 극값을 가짐을 설명 : 10점
- 정답을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$를 지나는 접선의 방정식은

$$y = \frac{e^{-s+a}}{(1+e^{-s+a})^2}(x-s) + \frac{1}{1+e^{-s+a}}$$

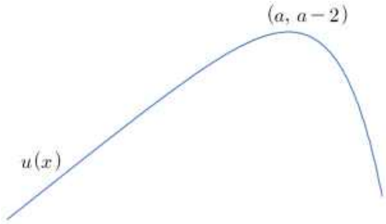
이다. 이 접선이 점 $(t, 0)$을 지나면

$$t = -e^{s-a} + s - 1$$

이다. 따라서 $u(x) = -e^{x-a} + x - 1$ 이라 하면 $n(t)$는 곡선 $y = u(x)$와 직선 $y = t$의 교점의 개수이다.

함수 $u(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

	$\cdots$	$x=a$	$\cdots$
$u'(x)$	$+$	0	$-$
$u(x)$	$\nearrow$	$a-2$	$\searrow$



위 표에서 함수 $u(x)$는 $x=a$일 때 최댓값 $a-2$가 된다. 그러므로

$$n(t)=\begin{cases}0, & t>a-2\\ 1, & t=a-2\\ 2, & t<a-2\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

이다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$는 y축에 대칭이므로 $m(t)=n(-t)$.

따라서

$$m(t)=\begin{cases}0, & t<2-a\\ 1, & t=2-a\\ 2, & t>2-a\end{cases}$$

이다.

$n(t)+m(t)>0$이 성립하려면 $n(t)>0$ 또는 $m(t)>0$이어야 하고, $t\le a-2$ 또는 $2-a\le t$이어야 한다. 따라서 모든 실수 t에 대하여 $n(t)+m(t)>0$이 성립하려면 $a-2\ge 2-a$, 즉 $a\ge 2$이어야 한다.

[논제 2] 먼저 $h(x)$가 삼차 이상의 다항함수인 경우에는

$$h'(x)(h''(x)-h''(0))$$

가 홀수차 다항함수이므로

$$\lim_{x\to\infty}h'(x)(h''(x)-h''(0))=\infty \text{와 } \lim_{x\to-\infty}h'(x)(h''(x)-h''(0))=-\infty$$

또는

$$\lim_{x\to\infty}h'(x)(h''(x)-h''(0))=-\infty \text{와 } \lim_{x\to-\infty}h'(x)(h''(x)-h''(0))=\infty$$

이다. 따라서 모든 실수 x에 대해 $h'(x)(h''(x)-h''(0))\ge 0$을 만족시킬 수 없다.

한편, $h(x)$가 이차 이하의 다항함수일 때에는 $h''(x)-h''(0)=0$ 이므로 $h'(x)(h''(x)-h''(0))\ge 0$을 만족시킨다. 그러므로 $h(x)=bx^2+cx+d$라 하자.

이제, 조건 (2)를 만족시키는 $h(x)=bx^2+cx+d$를 찾기 위해서 함수 $F(x)$의 극값을 살펴보자.

$$F'(x)=\frac{-e^{-x+a}}{1+e^{-x+a}}+2bx+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

이므로, $G(x)=\dfrac{-e^{-x+a}}{1+e^{-x+a}}$ 라 할 때, 방정식 ②의 해는 방정식

$$G(x)=-2bx-c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

의 해와 같다.

$$G'(x)=\frac{e^{-x+a}}{(1+e^{-x+a})^2}>0$$

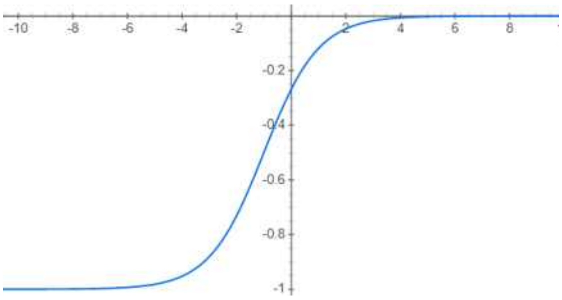
이므로 $G(x)$는 증가함수이고,

$$\lim_{x\to\infty}G(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}G(x)=-1$$

이므로

$$-1<G(x)<0$$

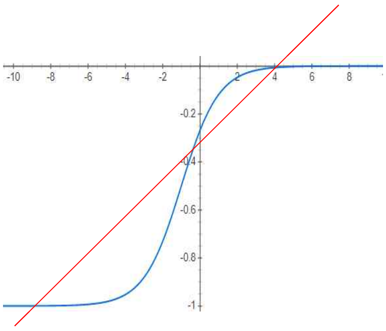
이다. 이를 바탕으로 $G(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



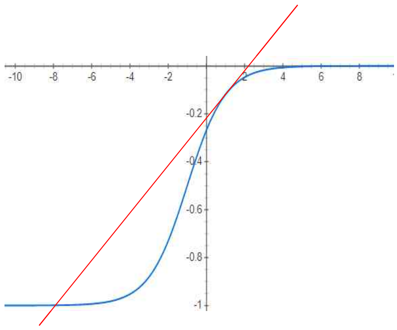
(A) $b \neq 0$일 때는 직선 ℓ: $y = -2bx - c$와 곡선 $y = G(x)$가 만나는 교점이 항상 존재한다.

(i) 직선 ℓ이 곡선 $y = G(x)$에 접하지 않을 경우:

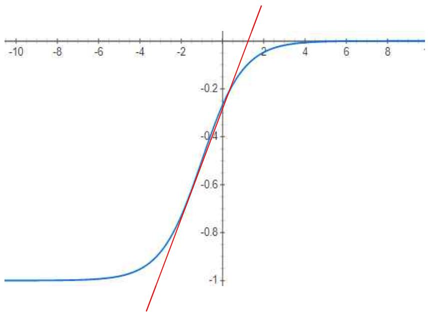
모든 교점의 좌우에서 직선 ℓ의 그래프와 곡선 $y = G(x)$의 위, 아래가 바뀌므로 식 ②의 교점의 x좌표의 좌우에서 $F'(x)$의 부호가 바뀐다. 따라서 제시문 (다)에 의하여 $F(x)$는 모든 교점의 x좌표에서 극값을 갖는다([그림 1]).



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

(ii) 직선 ℓ이 곡선 $y = G(x)$에 접할 경우: [논제 1]의 풀이의 식 ①로부터 교점은 2개 또는 1개이다.

- 교점이 2개인 경우: 접하는 점이 아닌 다른 교점 (x_0, y_0)의 좌우에서 직선 ℓ과 곡선 $y = G(x)$의 위, 아래가 바뀌므로 $F'(x)$는 $x = x_0$의 좌우에서 부호가 바뀐다([그림 2]). 따라서 $F(x)$는 $x = x_0$에서 극값을 갖는다.
- 교점이 1개인 경우: 교점의 좌우에서 $F(x)$의 그래프는 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌므로 교점은 변곡점이고, 따라서 직선 ℓ과 곡선 $y = G(x)$의 위, 아래가 바뀐다([그림 3]). 따라서 이 경우에도 $F(x)$는 극값을 갖는다.

따라서 $b \neq 0$인 경우에는 조건 (2)를 만족시키는 다항함수 $h(x)$가 존재하지 않는다.

(B) $b = 0$일 때

(i) 직선 $y = -c$와 곡선 $y = G(x)$의 교점이 존재하면 직선 $y = -c$ 와 곡선 $y = G(x)$의 위, 아래가 바뀐다. 따라서 이 경우에도 $F(x)$는 극값을 갖는다.

(ii) 직선 $y = -c$와 곡선 $y = G(x)$의 교점이 존재하지 않으면 제시문 (나)에 의해 $F(x)$의 극값이 없다. 이때,

$$c \geq 1 \text{ 또는 } c \leq 0$$

그러므로 조건 (1), (2)를 만족시키는 다항함수 $h(x)$는

$$h(x) = cx + d \quad (c \geq 1 \text{ 또는 } c \leq 0 \text{ 이고 } d\text{는 모든 실수})$$

꼴이다.