

단국대학교 2021학년도 모의논술고사

자연계열 가이드답안



문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[문제 1] 함수의 극값에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[문제 2] 정적분의 개념과 다항함수의 구조에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[문제 3] 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 적분문제를 해결 할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

- 배종숙 외 (2018), 수학, 21-22쪽
- 김원경 외 (2018), 수학 II, 82-85쪽
- 홍성복 외 (2019), 미적분, 144-159쪽
- 권오남 외 (2019), 미적분, 149-161쪽

[문제 1 평가기준]

- 관계식 $f(x) = f'(x)Q(x) + R(x)$ 를 제시 : 7점
- $f(x_i) = R(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)임을 제시 : 5점
- 결론을 제시 : 3점

[문제 2 평가기준]

- $C(m)$ 을 제시 : 7점
- $Q(t)$ 와 $R(t)$ 를 제시 : 5점
- $f(x)$ 를 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 3점

[문제 3 평가기준]

- $S(m)$ 을 제시 : 5점
- $S'(m)$ 을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[문제 1] 제시문 (가)와 조건 (1)에 의하여

$$f(x) = f'(x)Q(x) + R(x)$$

이다. $f(x)$ 는 $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$ 에서 극값을 가지므로 제시문 (나)에 의하여

$$f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0, \dots, f'(x_n) = 0$$

이고, 따라서

$$f(x_1) = R(x_1), f(x_2) = R(x_2), \dots, f(x_n) = R(x_n)$$

이다. 그러므로 점 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n))$ 은 곡선 $y = R(x)$ 위의 점이다.

[문제 2] 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$$

이므로 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)$$

이다. 그러므로 $C(m)$ 을 구하면

$$C(m) = \begin{cases} \pi \frac{1+m^2}{m^2}, & m \geq 1 \\ \pi (1+m^2), & m < 1 \end{cases}$$

이다. 문제의 조건에 의하여

$$\begin{aligned} R(t) - \frac{1}{3Q(t)} - \frac{1}{3}(1-t)^3 &= \frac{1}{\pi} \int_{1-t}^{1+t} C(m) dm \\ &= \int_{1-t}^1 (1+m^2) dm + \int_1^{1+t} \frac{1+m^2}{m^2} dm \\ &= \left[m + \frac{1}{3}m^3 \right]_{1-t}^1 + \left[-\frac{1}{m} + m \right]_1^{1+t} \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(1-t)^3 + 2t - \frac{1}{1+t} \end{aligned}$$

이므로

$$R(t) - \frac{4}{3} - 2t = \frac{1}{3Q(t)} - \frac{1}{1+t}$$

이다. 따라서

$$Q(t) = \frac{1}{3}(t+1), \quad R(t) = \frac{4}{3} + 2t$$

이다. $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2a_2x + a_1$ 이고

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (3x^2 + 2a_2x + a_1)\left(\frac{x+1}{3}\right) + \frac{4}{3} + 2x$$

에서 $a_2 = 3, a_1 = 6, a_0 = \frac{10}{3}$ 을 얻는다. 따라서,

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + \frac{10}{3}$$

이고 $f(1) = \frac{40}{3}$ 이다.

[문제 3] 삼각형 OAB의 넓이 $S(m)$ 은

$$S(m) = \frac{1+m^2}{2m}$$

이고

$$S'(m) = \frac{2m \times 2m - (1+m^2)2}{4m^2} = \frac{m^2-1}{2m^2}$$

이다. $u = S(m)$ 으로 치환하면

$$S(1) = 1, S(2) = \frac{5}{4}$$

이고

$$du = S'(m)dm = \frac{m^2-1}{2m^2}dm$$

이므로 제시문 (다)와 (라)에 의하여

$$\begin{aligned} \int_1^2 m \ln(S(m)) dm - \int_1^2 \frac{\ln(S(m))}{m^3} dm &= \int_1^2 \frac{m^4-1}{m^3} \ln(S(m)) dm \\ &= 4 \int_1^{\frac{5}{4}} u \ln u du \\ &= 2 \left[u^2 \ln u \right]_1^{\frac{5}{4}} - 2 \int_1^{\frac{5}{4}} u du \\ &= \frac{25}{8} \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{9}{16} \end{aligned}$$

를 얻는다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[문제 1] 조합의 개념을 사용하여 확률 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[문제 2] 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

- 고성은 외 (2019년), 확률과 통계, 79-90쪽
- 박교식 외 (2019년), 확률과 통계, 81-92쪽

[문제 1 평가기준]

- $P(X=5)$ 를 제시 : 10점
- $a=2$ 를 제시 : 10점

[문제 2 평가기준]

- 확률변수가 0 일 때를 고려한 기댓값을 제시 : 5점
- $kP(X=k) = \frac{10^2}{50} \times \frac{{}_9C_{k-1} \times {}_{40}C_{10-k}}{{}_{49}C_9}$ 를 제시 : 10점
- $\frac{{}_9C_0 \times {}_{40}C_9}{{}_{49}C_9} + \frac{{}_9C_1 \times {}_{40}C_8}{{}_{49}C_9} + \dots + \frac{{}_9C_9 \times {}_{40}C_0}{{}_{49}C_9} = 1$ 을 제시 : 5점
- $E(X) = 2$ 를 제시 : 5점

□ 예시 답안

[문제 1] 중복되는 번호의 개수가 k 일 확률 $P(X=k)$ 는

“두 번째로 공을 뽑을 때, 처음 뽑힌 10 개의 공 중에서 k 개의 공을 뽑고
처음에 뽑히지 않은 나머지 40개의 공 중에서 $10-k$ 개를 뽑을 확률”

과 같으므로

$$P(X=k) = \frac{{}_{10}C_k \times {}_{40}C_{10-k}}{{}_{50}C_{10}}$$

이다. 제시문 (나)에 의하여 $5 \times {}_{10}C_5 = 10 \times {}_9C_4$ 이므로

$$P(X=5) = \frac{{}_{10}C_5 \times {}_{40}C_5}{{}_{50}C_{10}} = 2 \times \frac{{}_9C_4 \times {}_{40}C_{35}}{{}_{50}C_{10}}$$

가 되어 $a=2$ 이다.

[문제 2] 확률변수 X 의 기댓값 $E(X)$ 는

$$E(X) = \sum_{k=0}^{10} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{10} k P(X=k)$$

이다. $k = 1, 2, \dots, 10$ 에 대하여

$$kP(X=k) = k \times \frac{{}^{10}C_k \times {}^{40}C_{10-k}}{{}^{50}C_{10}}$$

이고, 제시문 (나)에 의하여 $k \times {}^{10}C_k = 10 \times {}^9C_{k-1}$, ${}^{50}C_{10} = \frac{50}{10} \times {}^{49}C_9$ 이므로

$$kP(X=k) = k \times \frac{{}^{10}C_k \times {}^{40}C_{10-k}}{{}^{50}C_{10}} = \frac{10^2}{50} \times \frac{{}^9C_{k-1} \times {}^{40}C_{10-k}}{{}^{49}C_9}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{{}^9C_0 \times {}^{40}C_9}{{}^{49}C_9} + 2 \times \frac{{}^9C_1 \times {}^{40}C_8}{{}^{49}C_9} + \dots + 2 \times \frac{{}^9C_9 \times {}^{40}C_0}{{}^{49}C_9} \\ &= 2 \left(\frac{{}^9C_0 \times {}^{40}C_9}{{}^{49}C_9} + \frac{{}^9C_1 \times {}^{40}C_8}{{}^{49}C_9} + \dots + \frac{{}^9C_9 \times {}^{40}C_0}{{}^{49}C_9} \right) \end{aligned}$$

이다.

$k = 0, 1, \dots, 9$ 에 대하여 $\frac{{}^9C_k \times {}^{40}C_{9-k}}{{}^{49}C_9}$ 는

“검은색 공이 9개, 흰색 공이 40개 들어있는 주머니에서
9개의 공을 동시에 뽑았을 때 검은색 공이 k 개 뽑힐 확률”

과 같다. 그러므로 제시문 (다)에 의하여 모든 확률 $\frac{{}^9C_k \times {}^{40}C_{9-k}}{{}^{49}C_9}$ 의 합은 1이다. 즉,

$$\frac{{}^9C_0 \times {}^{40}C_9}{{}^{49}C_9} + \frac{{}^9C_1 \times {}^{40}C_8}{{}^{49}C_9} + \dots + \frac{{}^9C_9 \times {}^{40}C_0}{{}^{49}C_9} = 1$$

이다. 따라서 $E(X) = 2$ 이다.