단국대학교 2024학년도 모의논술고사

자연계열 가이드답안

단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 도함수를 활용하여 함수의 극대 극소를 판별할 수 있는지를 평가

[논제 2] 함수의 그래프를 활용하여 극값을 구할 수 있는지를 평가

[논제 3] 근과 계수와의 관계를 활용하여 적분을 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 황선욱 외(2022), 수학 II, 미래앤, 102-109, 122-128쪽
○ 권오남 외(2020), 미적분, 교학사, 108-111쪽
○ 김원경 외(2020), 수학 I, 비상교육, 132-158쪽

[논제 1 평가기준]
- $1 \le \ell \le 9$를 제시 : 5점
- $f(x)$를 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- s의 값을 제시 : 7점
- $F(x)$를 제시 : 8점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]
- $S(t)$를 제시 : 8점
- $a=1$, $b+c=48$을 제시 : 7점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] $g(0)=\ell$, $g'(0)=\frac{2}{3}\ell$이므로 $g(x)=x^2+\left(\frac{2}{3}\ell\right)x+\ell$이다. 판별식 $D=\frac{4\ell(\ell-9)}{9}$로부터 $\ell \ge 10$이면 $F(x)=0$은 서로 다른 실근을 3개 이상 가지게 되므로 $F(x)<0$이 되는 x가 존재한다. 따라서 $1 \le \ell \le 9$. 한편 $F(3)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $F(x) \ge 0$이므로 $F(x)$는 $x=3$에서 극솟값 0을 갖는다. 따라서 $F'(3)=0$이고 $g(3)>0$이므로 $f(x)=(x-3)^2$이고,

$$F'(x)=2x(x-3)(2x-3+\ell)$$

(i) $\ell \neq 3$ 인 경우 : $F(x)$는 $x=0$, $x=3$, $x=\frac{3-\ell}{2}$ 에서 극값을 갖는다. $F(0)$과 $F(3)$은 정수이고, 극값

$$F\left(\frac{3-\ell}{2}\right)=-\frac{1}{48}(\ell-9)(\ell+3)^3$$

은 $\ell=9$일 때만 정수가 된다.

(ii) $\ell=3$ 인 경우 : $F(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖고 $F(3)=0$이므로 정수이다.

(i), (ii)에 의해 자연수 ℓ의 개수는 2

[논제 2] $G'(x)=F'(x)e^{F(x)}$이고 $e^{F(x)}>0$이므로 두 함수 $G(x)$와 $F(x)$가 극값을 갖는 x의 값은 서로 같다. $F(3)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $F(x) \geq 0$이므로 $F(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다. 따라서,

$$F'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=0$$

에서 $f'(3)g(3)=0$ 이므로 $f'(3)=0$ 또는 $g(3)=0$.

(i) $g(3)=0$ 인 경우 :

$$f(x)=(x-3)(x-\alpha), \quad g(x)=(x-3)(x-\beta)$$

라 할 때, $\alpha=3$ 또는 $\beta=3$이면 $F(x)$가 극댓값을 갖지 않는다. 따라서 $\alpha \neq 3$, $\beta \neq 3$이다. 또한, $F(x)=0$은 서로 다른 실근을 3개 이상 갖지 않으므로 $\alpha=\beta$이다. 그러나 이 경우 $f(x)=g(x)$이므로 논제의 조건을 만족하는 교점이 존재하지 않는다.

(ii) $f'(3)=0$ 인 경우 : $f(x)=(x-3)^2$

한편 논제의 조건에 의해 $f'(s)g'(s)=-1$이고 $f(s)=g(s)$이므로

$$F'(s)=f'(s)g(s)+f(s)g'(s)=f(s)(f'(s)+g'(s))=0$$

$s>3$에 대하여 $f(s)>0$이므로 $f'(s)+g'(s)=0$. 두 식

$$f'(s)g'(s)=-1, \quad f'(s)+g'(s)=0$$

이고 $f'(s)>0$이므로 $f'(s)=2(s-3)=1$에서 $s=\frac{7}{2}$

$$g\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\right), \quad g'\left(\frac{7}{2}\right)=-1$$

에서 $g(x)=x^2-8x+16=(x-4)^2$이므로 $F(x)=(x-3)^2(x-4)^2$이고

$$F\left(\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{7}{2}-3\right)^2\left(\frac{7}{2}-4\right)^2=\frac{1}{16}.$$

그러므로 $G\left(\frac{7}{2}\right)=e^{\frac{1}{16}}$.

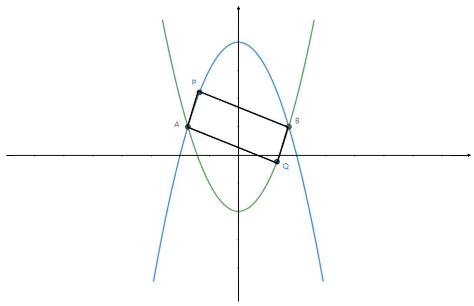
[논제 3] $b+c=M$라 하면 $-ax^2+b=ax^2-c$에서 $\alpha=-\sqrt{\frac{M}{2a}}$이고 $\beta=\sqrt{\frac{M}{2a}}$이므로

$$\mathrm{A}\left(-\sqrt{\frac{M}{2a}}, \frac{b-c}{2}\right), \quad \mathrm{B}\left(\sqrt{\frac{M}{2a}}, \frac{b-c}{2}\right)$$

$\alpha<t<\beta$인 실수 t에 대하여

$$\mathrm{P}(-t, -at^2+b), \quad \mathrm{Q}(t, at^2-c)$$

이고 $\beta-\alpha=2\sqrt{\frac{M}{2a}}$, $\alpha\beta=-\frac{M}{2a}$이므로



$$S(t)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left[h(-t)-\frac{b-c}{2}\right]+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left[\frac{b-c}{2}-k(t)\right]=\sqrt{\frac{M}{2a}}\left(-2at^2+M\right)$$

따라서,

$$\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\beta}{2}} S(t)dt = \sqrt{\frac{M}{2a}}(\beta-\alpha)\left\{-\frac{1}{12}a(\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta)+\frac{M}{2}\right\}$$

$\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta=(\beta-\alpha)^2+3\alpha\beta=\frac{M}{2a}$ 이므로

$$\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\beta}{2}} S(t)dt = \frac{11M^2}{24a}$$

한편 $22a^2\alpha\beta+33(b+c)=11(3-a)(b+c)$ 이므로 $\frac{11M^2}{24a}=11(3-a)M$, 즉 $M=24a(3-a)$ 이다.

M은 자연수이므로 $a=1, 2$ 이고 $b+c=48$ 이다.

$$0<h(4)-k(4)=-32a+b+c$$

이므로 $a=1$ 이고 $h(x)=-x^2+b$ 이고 $k(x)=x^2-c$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{11}h(n)-\sum_{n=1}^{9}k(n) &= \sum_{n=1}^{11}\{h(n)-k(n)\}-h(1)-h(2)+k(10)+k(11)\\ &= \sum_{n=1}^{11}(-2n^2+b+c)-2(b+c)+226=-354\end{aligned}$$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

☐ 출제의도

[논제 1] 연속함수의 개념을 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 함수의 극값을 이해하고 정적분의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

☐ 자료출처

○ 고성은 외(2020), 수학 II, 신사고, 30-34쪽
○ 이준열 외(2020), 수학 II, 천재교육, 86-90쪽
○ 홍성복 외(2020), 수학 II, 지학사, 126-134쪽
○ 황선욱 외(2022), 미적분, 미래앤, 137-138쪽

[논제 1 평가기준]
- $k=0$일 때의 연속성을 제시 : 4점
- $k \neq 0$일 때의 연속성을 제시 : 12점
- 정답을 제시 : 4점

[논제 2 평가기준]
- $m=2$를 제시 : 5점
- $\int_0^2 h(x)\,dx = -12$를 제시 : 5점
- $\int_0^4 h(x)\,dx = -24$를 제시 : 9점
- 정답을 제시 : 6점

☐ 예시 답안

[논제 1] $g(x)g(x+k)$ 의 연속성은 $x=0$과 $x=-k$에서만 살펴보면 된다.
(1) $k=0$일 때:
$g(x)g(x+0)=\{g(x)\}^2$ 은

$$\lim_{x \to 0-} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \to 0+} \{g(x)\}^2 = \{g(0)\}^2 = 25$$

이므로 $x=0$에서 연속이다.
(2) $k \neq 0$일 때:
(i) $x=0$에서의 연속성:

$$\lim_{x \to 0-} g(x)g(x+k) = -5g(k),\quad \lim_{x \to 0+} g(x)g(x+k) = 5g(k),\quad g(0)g(0+k) = 5g(k)$$

이므로 $g(k)=0$ 이어야 한다.

(ii) $x=-k$ 에서의 연속성:

$$\lim_{x\to -k-} g(x)g(x+k)=-5g(-k),\ \lim_{x\to -k+} g(x)g(x+k)=5g(-k),\ g(-k)g(-k+k)=5g(-k)$$

이므로 $g(-k)=0$ 이어야 한다.

(i)과 (ii)에 의해 $g(k)=0=g(-k)$인 k의 값을 구하면 $k=-1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}$.

따라서 (1)과 (2)로부터 $k=-1-\sqrt{6},\ 0,\ 1+\sqrt{6}$

[논제 2] $f(x)=x^3-3x^2-3mx+5$는 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로

$f'(x)=3x^2-6x-3m=0$은 서로 다른 두 실근 $x=1\pm\sqrt{1+m}$을 가진다.

$-2<1-\sqrt{1+m}<-\dfrac{1}{2}$ 이므로 $\dfrac{5}{4}<m<8$이고, $1<1+\sqrt{1+m}<3$이므로 $-1<m<3$이다.

따라서 $\dfrac{5}{4}<m<3$ 이다. 그러므로 $m=2$이고 $f(x)=x^3-3x^2-6x+5$이다.

조건 (1)에 의해 $0\le x\le 2$일 때 $h(x)=2x^3-6x^2-12x+10$이므로

$$\int_0^2 h(x)\,dx=-12$$

이고 조건 (3)과 (2)에 의해

$$\int_2^4 h(x)\,dx=\int_{-2}^0 h(x)\,dx=\int_0^2 h(x)\,dx=-12$$

이므로

$$\int_0^4 h(x)\,dx=-24$$

따라서

$$\int_0^{33} h(x)\,dx=\int_0^{32} h(x)\,dx+\int_{32}^{33} h(x)\,dx=8\int_0^4 h(x)\,dx+\int_0^1 h(x)\,dx=-\frac{379}{2}$$