단국대학교 2023학년도 모의논술고사

자연계열 가이드답안

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 수열의 성질을 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 도함수의 성질을 이용하여 극값을 판정할 수 있는지를 평가

[논제 3] 내분점의 개념을 이해하고 다항함수의 정적분을 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김원경 외(2020), 수학, 102-109쪽
○ 김원경 외(2020), 미적분, 16-19쪽
○ 류희찬 외(2022), 미적분, 18-22쪽
○ 황선옥 외(2022), 수학 II, 82-88쪽, 122-128쪽

[논제 1 평가기준]

- $k^2 < \sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < k^2+4k+4$ 를 제시 : 8점
- $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} < \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \dfrac{2(n+1)}{n^2} + \dfrac{4}{n^2}$ 를 제시 : 4점
- 정답을 제시 : 3점

[논제 2 평가기준]

- $\beta = 6$ 임을 제시 : 10점
- $f(x) = x(x-6)^2 + f(6)$을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]

- $g(x) = \dfrac{1}{4}f(2x) + \dfrac{3}{4}f\left(\dfrac{2}{3}x\right)$를 제시 : 10점
- $\gamma = 3$ 임을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 자연수 k에 대하여

$$k^4 < k(k+1)(k^2+3) < k(k+1)(k^2+4k+4) < (k^2+4k+4)^2 \qquad ....(A)$$

이므로 $k^2 < \sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < k^2+4k+4$ 이고

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2+4k+4)$$

따라서

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{2(n+1)}{n^2} + \frac{4}{n^2}$$

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{2(n+1)}{n^2} + \frac{4}{n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

이고 제시문 (가)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k^2+3)} = \frac{1}{3}$$

(참고) 부등식 (A)는 다음과 같은 부등식으로 바꾸어 풀이가 가능하다.

$$k^4 < k(k+1)(k^2+3) < (k+1)^4$$

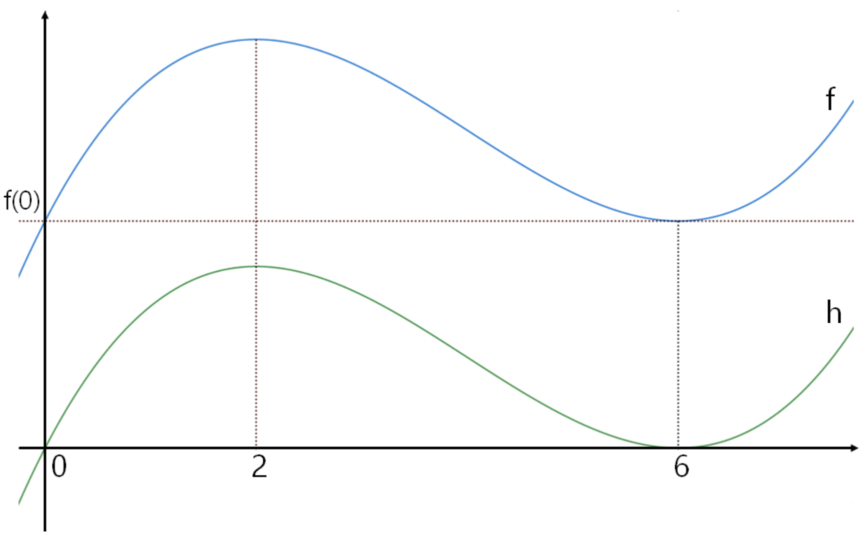
[논제 2] 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 조건 (1)에 의하여 $f(\alpha)$는 극댓값, $f(\beta)$는 극솟값이며 $f(\alpha) > f(\beta)$이다. 함수 $h(x) = f(x) - f(\beta)$라 하면 $h'(x) = f'(x)$이고 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. 조건 (1)과 (2)에 의하여

$$h(x) = x(x-\beta)^2$$

조건 (3)에 의하여

$$108 = \int_0^\beta f(x)dx - \beta f(\beta) = \int_0^\beta h(x)dx = \int_0^\beta x(x-\beta)^2 dx = \frac{1}{12}\beta^4$$

이므로 $\beta = 6$이다. 따라서 $h(x) = x(x-6)^2$



$f(2) > f(6)$이므로 두 극값의 차는 32이다.

[논제 3] 주어진 조건을 만족하는 함수 $f(x)$는

$$f(x) = x(x-6)^2 + f(6)$$

이고

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 \qquad \text{.................(B)}$$

점 R의 좌표를 (x, y)라 하자. 두 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$, $\mathrm{Q}(3t, f(3t))$를 $1:3$으로 내분하는 내분점은

$$\left(\frac{3t+3t}{1+3}, \frac{f(3t)+3f(t)}{1+3}\right) = \left(\frac{3t}{2}, \frac{f(3t)+3f(t)}{4}\right)$$

$x = \frac{3t}{2}$, $y = \frac{f(3t)+3f(t)}{4}$라 할 때 구하는 곡선의 방정식은

$$y = \frac{1}{4}f(2x) + \frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}x\right)$$

따라서 $g(x) = \frac{1}{4}f(2x) + \frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}x\right)$이다. 한편

$$g'(x) = \frac{1}{2}f'(2x) + \frac{1}{2}f'\left(\frac{2}{3}x\right)$$

이고 $g'(x) = 0$에서 $f'(2x) + f'\left(\frac{2}{3}x\right) = 0$이므로 식 (B)로 부터

$$(5x-9)(x-3) = 0$$

$g(x)$는 $x = 3$에서 극솟값을 갖는다.

$$50 = \int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 18x^2 + f(6)x\right]_0^2 = 44 + 2f(6)$$

에서 $f(6) = 3$이고 극댓값은 $f(2) = 35$이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 정적분과 도함수 사이의 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 도함수의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 권오남 외(2020), 수학 II, 88-95쪽, 130-136쪽
○ 이준열 외(2020), 수학 II, 86-89쪽, 121-126쪽
○ 황선옥 외(2022), 수학 II, 82-88쪽, 122-128쪽

[논제 1 평가기준]

- $g(x)=\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}\,dt+\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}\,dt$ 임을 제시 : 7점
- $g'(x)=2(x-1)(3x-4)$ 임을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 3점

[논제 2 평가기준]

- $h(x)$ 의 극값을 모두 제시 : 5점
- $h(\alpha)\le\alpha$ 를 제시 : 15점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] $0<t\le 2-x$일 때, $f(x)\ge f(t)$이고 $2-x<t\le x$일 때, $f(x)\le f(t)$이므로

$$\begin{aligned} g(x)&=\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}\,dt+\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}\,dt\\ &=f(x)\int_0^{2-x}1\,dt-\int_0^{2-x}f(t)\,dt+\int_{2-x}^{x}f(t)\,dt-f(x)\int_{2-x}^{x}1\,dt\\ &=f(x)(2-x)-\int_0^{2-x}f(t)\,dt+\int_{2-x}^{x}f(t)\,dt-f(x)(2x-2)\end{aligned}$$

$g'(x)=2(x-1)(3x-4)$이고 제시문 (다)에 의하여 $x=\dfrac{4}{3}$에서 극값을 갖는다. 따라서 $a=\dfrac{4}{3}$이다.

[논제 2] $h'(x) = 2x(\alpha - x)e^{-\frac{2x}{\alpha}}$ 이므로 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\alpha^3 e^{-2}$	$\searrow$

$h(x)$의 극솟값은 $h(0)=0$이고 극댓값은 $h(\alpha)=\alpha^3 e^{-2}$ 이다.

(i) $h(t) > \alpha$인 양의 실수 t가 존재하는 경우:

$\alpha \notin [h(t), h(t)+\alpha]$ 이고 닫힌구간 $[h(t), h(t)+\alpha]$ 에서 $h(x)$는 감소하므로 $k(t) = h(h(t))$ 이다.

$h(\alpha) > \alpha$ 이므로 곡선 $y = h(x)$와 직선 $y=\alpha$의 두 교점의 x좌표를 t_1, t_2 $(0 < t_1 < t_2)$라 하면(그림 1), 열린구간 (t_1, t_2)에서 $k(t) = h(h(t))$이고 $k(t)$는 이 구간에서 일정한 값을 갖지 않는다.

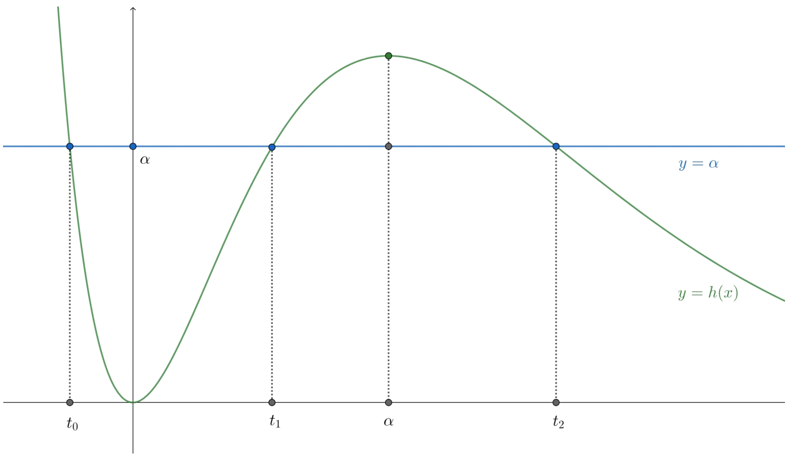


그림 1 : $h(\alpha) > \alpha$인 경우

(ii) 모든 양의 실수 t에 대하여 $0 \le h(t) \le \alpha$인 경우:

$\alpha \in [h(t), h(t)+\alpha]$ 이므로 $k(t)$는 항상 일정한 값 $h(\alpha)$를 갖는다(그림 2).

$h(\alpha)$는 극댓값이므로 $h(\alpha) = \alpha^3 e^{-2} \le \alpha$ 인 모든 α에 대하여 함수 $k(t)$는 문제의 조건을 만족시킨다.

따라서 최댓값은 e이다.

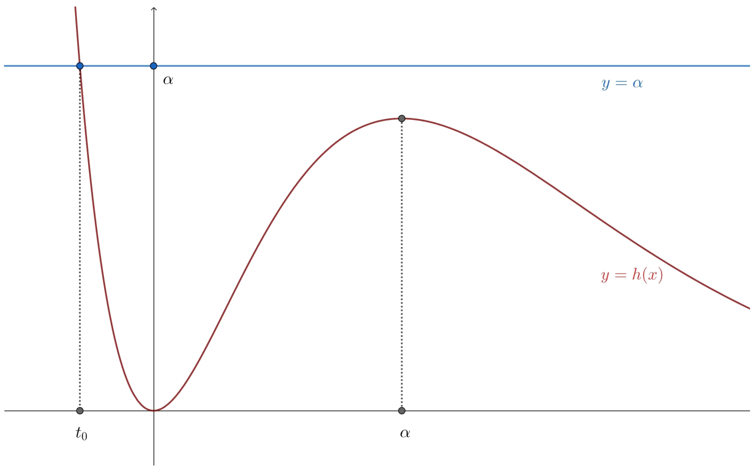


그림 2 : $h(\alpha) \le \alpha$인 경우