단국대학교 2021학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오전)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 적분법을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 극값의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

[논제 3] 함수의 개념과 접선의 성질을 이해할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 고성은 외(2020), 수학, 214-216쪽
○ 류희찬 외(2020), 수학, 224-226쪽
○ 고성은 외(2020), 수학II, 30-34쪽, 72-74쪽, 119-121쪽
○ 박교식 외(2020), 미적분, 101-107쪽, 127-144쪽

[논제 1 평가기준]

- 적분함수 $-xe^{-x^2}$을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- 적분함수 $F(x)$를 제시 : 12점
- 정답을 제시 : 8점

[논제 3 평가기준]

- $h(x)$의 그래프 등 관계식을 제시 : 8점
- 정답을 제시 : 12점

□ 예시 답안

[논제 1] 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt &= \int_0^1 2t^2e^{-t^2}dt - \int_0^1 e^{-t^2}dt \\ &= \int_0^1 (-t)\cdot(-2te^{-t^2})dt - \int_0^1 e^{-t^2}dt \\ &= \left[-te^{-t^2}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t^2}dt - \int_0^1 e^{-t^2}dt = -\frac{1}{e}\end{aligned}$$

[논제 2] $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^a f(t)\,dt$ 이므로 $F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$라 하면

$$F(x) = F_0(x) - F_0(a)$$

이다. $F_0(x)$는

(i) $-3 \le x < -1$인 경우:

$$F_0(x) = \int_0^{-1} (2t^2-1)e^{-t^2}dt + \int_{-1}^x \frac{1}{2e}(t+3)\,dt = \frac{1}{2e}\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)+\frac{9}{4e}$$

(ii) $-1 \le x < 1$인 경우: $F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt = -xe^{-x^2}$

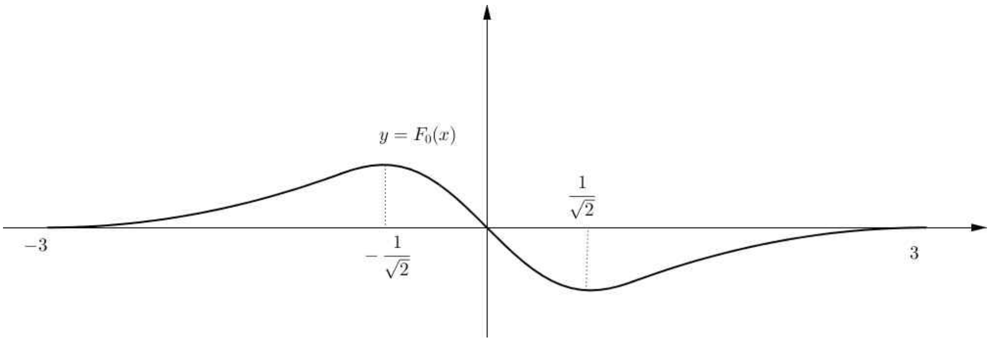
(iii) $1 \le x \le 3$인 경우:

$$F_0(x) = \int_0^1 (2t^2-1)e^{-t^2}dt + \int_1^x -\frac{1}{2e}(t-3)\,dt = -\frac{1}{2e}\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)-\frac{9}{4e}$$

함수 $F_0(x)$의 증감표를 조사하면

x	-3	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	3
$F_0{}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F_0(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0

이므로 함수 $F_0(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

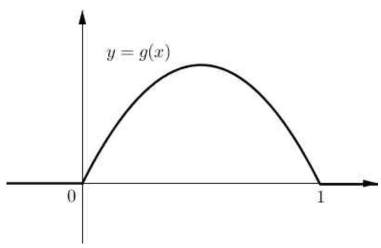


곡선 $y=F(x)$와 x축이 한 점에서 만나는 경우는 곡선 $y=F_0(x)$와 직선 $y=F_0(a)$가 한 점에서 만나는 경우와 같다. 따라서 그래프로부터 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

[논제 3] $x-x^2 \ge 0$ 이면 $g(x) = 2(x-x^2)$ 이고 $x-x^2 < 0$ 이면 $g(x) = 0$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ -2x(x-1) & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (x>1) \end{cases}$$

이다.



이 식으로부터,

$$16g\left(\frac{x}{4}\right)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ -2x(x-4) & (0\le x\le 4)\\ 0 & (x>4)\end{cases} \quad \text{--------------------------------(1)}$$

이고

$$8g\left(\frac{x}{2}-2\right)=\begin{cases}0 & (x<4)\\ -4(x-4)(x-6) & (4\le x\le 6)\\ 0 & (x>6)\end{cases} \quad \text{------------------------(2)}$$

이다.

(1)과 (2)에 의하여

$$h(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ -2x(x-4) & (0\le x<4)\\ -4(x-4)(x-6) & (4\le x\le 6)\\ 0 & (x>6)\end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여, x에 대한 방정식

$$t\,h(x)=x\,h(t) \quad \text{--(3)}$$

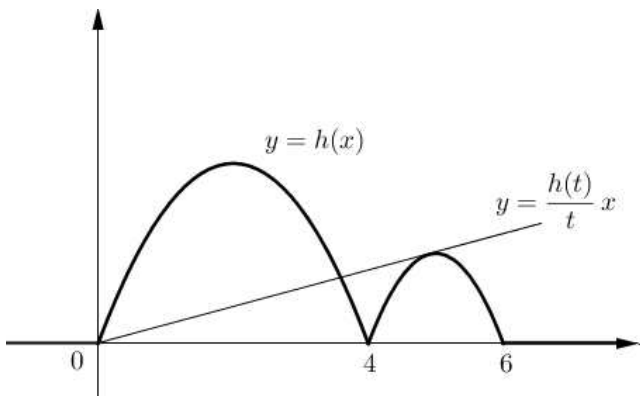
을 풀면 다음과 같다.

(i) $t=0$이면 모든 실수 x가 방정식 (3)을 만족한다.

(ii) $t\neq 0$이면 x에 대한 방정식

$$h(x)=\frac{h(t)}{t}x$$

의 실근의 개수는 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=\frac{h(t)}{t}x$의 교점의 개수와 같다.



위의 그래프로부터 직선 $y=\frac{h(t)}{t}x$와 곡선 $y=h(x)$가 세 점에서 만나는 경우는 구간 $4\le x\le 6$에서 직선 $y=\frac{h(t)}{t}x$이 곡선 $y=h(x)$의 그래프에 접하는 경우이다. 실제로, 원점을 지나는 직선이 곡선 $y=-4(x-4)(x-6)$에 접하는 접점의 x좌표는 $x=2\sqrt{6}$이므로 접선의 방정식은

$$y=(40-16\sqrt{6})x$$

이다. 또한 구간 $0\le x\le 4$에서 직선 $y=(40-16\sqrt{6})x$와 곡선 $y=h(x)$가 만나는 점의 x좌표는 $x=0$과 $x=8\sqrt{6}-16$이다. 결국 구하고자 하는 t의 값은

$$t=8\sqrt{6}-16 \text{ 과 } t=2\sqrt{6}$$

이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 독립시행의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 이항분포의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 권오남 외(2020), 확률과 통계, 10-25쪽, 67-77쪽
○ 고성은 외(2020), 확률과 통계, 10-21쪽, 63-75쪽
○ 박교식 외(2020), 확률과 통계, 10-27쪽, 66-77쪽

[논제 1 평가기준]
- 공이 87번과 88번 분기점에 도착하는 확률을 제시 : 15점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- $\mathrm{P}(X=x)$ 와 $\mathrm{P}(X=x+1)$ 의 비 또는 차를 제시 : 7점
- 부등식 $\dfrac{4(100-x)}{x+1}>1$ 의 풀이 과정을 제시 : 8점
- 정답을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] 공이 87번 분기점에 도착하는 사건이 발생하려면 100번 중 87번은 오른쪽으로, 13번은 왼쪽으로 이동하여야 한다. 공의 이동은 규칙 (3)에 의해 독립시행이므로

$$\mathrm{P}(X=87)={}_{100}\mathrm{C}_{87}\left(\frac{1}{5}\right)^{13}\left(\frac{4}{5}\right)^{87}=\frac{100!}{13!87!}\left(\frac{1}{5}\right)^{13}\left(\frac{4}{5}\right)^{87}$$

이고

$$\mathrm{P}(X=88)={}_{100}\mathrm{C}_{88}\left(\frac{1}{5}\right)^{12}\left(\frac{4}{5}\right)^{88}=\frac{100!}{12!88!}\left(\frac{1}{5}\right)^{12}\left(\frac{4}{5}\right)^{88}$$

이므로 정답은

$$\frac{\mathrm{P}(X=87)}{\mathrm{P}(X=88)}=\frac{22}{13}$$

이다.

[논제 2] 공이 101번째 행의 x번 분기점에 도착할 확률

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{100!}{x!(100-x)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{100-x}\left(\frac{4}{5}\right)^{x}$$

이므로

$$\frac{\mathrm{P}(X=x+1)}{\mathrm{P}(X=x)}=\frac{\dfrac{100!}{(x+1)!(100-x-1)!}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{100-x-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x+1}}{\dfrac{100!}{x!(100-x)!}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{100-x}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x}}$$

$$=\frac{4(100-x)}{x+1} \qquad \text{---------------------}(*)$$

이다. (*)이 1보다 클 필요충분조건은

$$399>5x$$

이므로

$x\le 79$일 때 $\mathrm{P}(X=x+1)>\mathrm{P}(X=x)$

이고

$x\ge 80$일 때 $\mathrm{P}(X=x+1)<\mathrm{P}(X=x)$

이다. 즉, $x\le 80$일 때 $\mathrm{P}(X=x)$는 증가하고 $x\ge 80$일 때 $\mathrm{P}(X=x)$는 감소한다.

그러므로 구하고자 하는 a의 값은 80이다.