단국대학교 2021학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오후)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 확률의 기본개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 확률의 곱셈정리를 이해하고 활용할 수 있는지를 평가

[논제 3] 조건부확률의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김원경 외(2020), 확률과 통계, 53-60쪽
○ 권오남 외(2020), 확률과 통계, 62-70쪽
○ 박교식 외(2020), 확률과 통계, 61-69쪽

[논제 1 평가기준]
- 정답의 분모를 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]
- 스위치 S_E가 열렸을 때의 조건부확률을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 10점

[논제 3 평가기준]
- 조건부확률의 범위를 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 10점

□ 예시 답안

스위치 S_A, S_B, S_C, S_D, S_E가 닫힐 사건을 순서대로 A, B, C, D, E라고 하고, 전구에 불이 켜질 사건을 S라 하자. 각 사건의 확률을 순서대로 $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C), \mathrm{P}(D), \mathrm{P}(E), \mathrm{P}(S)$라 하자.

[논제 1] $p=1$ 이므로 $\mathrm{P}(S|E)=\mathrm{P}(S)$이고,

$$\mathrm{P}(S)=[1-\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(C^c)][1-\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(D^c)]=\left[1-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right]\left[1-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right]=\frac{19^2}{5^4}=\frac{361}{625}$$

(별해) $\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}((A\cup C)\cap \mathrm{P}(B\cup D))$

$$=[\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap C)][\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(D)-\mathrm{P}(B\cap D)]=\left[\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}\right]^2=\frac{361}{625}$$

[논제 2] S_E가 닫혀있지 않을 때 전구가 켜질 확률

$$\mathrm{P}(S|E^c)=1-[1-\mathrm{P}(A|B)][1-\mathrm{P}(C\cap D)]$$

$$=1-\left[1-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right]\left[1-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\right]=1-\left(\frac{21}{25}\right)\left(\frac{16}{25}\right)=\frac{289}{625}$$

이고, [논제 1]에서 $\mathrm{P}(S|E)=\dfrac{361}{625}$이므로

$$\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(S\cap E)+\mathrm{P}(S\cap E^c)=\mathrm{P}(S|E)\,\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(S|E^c)\,\mathrm{P}(E^c)$$

$$=\frac{361}{625}p+\frac{289}{625}(1-p)=\frac{72}{625}p+\frac{289}{625}$$

결국 $a=72$, $b=289$ 이다.

(별해) $\mathrm{P}(S|E^c)=\mathrm{P}((A\cap B)\cup(C\cap D))$

$$=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(C\cap D)-\mathrm{P}(A\cap B\cap C\cap D)$$

$$=\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{289}{625}$$

[논제 3] 주어진 조건으로부터

$$\frac{1}{2}\le \mathrm{P}(E|S),\ \ \frac{1}{3}\le \mathrm{P}(E^c|S)$$

이므로 $\mathrm{P}(E|S)+\mathrm{P}(E^c|S)=1$에서

$$\frac{1}{2}\le \mathrm{P}(E|S)\le \frac{2}{3}$$

이고

$$\frac{1}{2}\le \mathrm{P}(E|S)=\frac{\mathrm{P}(S\cap E)}{\mathrm{P}(S)}=\frac{\frac{361}{625}\cdot p}{\frac{361}{625}p+\frac{289}{625}(1-p)}\le\frac{2}{3}$$

이므로 $\dfrac{289}{650}\le p\le\dfrac{578}{939}$이다. 따라서, p의 최솟값은 $\dfrac{289}{650}$, 최댓값은 $\dfrac{578}{939}$ 이다.

(별해) $\dfrac{1}{3}\le \mathrm{P}(E^c|S)\le\dfrac{1}{2}$을 이용하여 $\dfrac{289}{650}\le p\le\dfrac{578}{939}$임을 유도할 수 있다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 부분적분법을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 극대, 극소의 개념을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 홍성복 외(2020), 수학, 219-231쪽
○ 권오남 외(2020), 수학II, 88-93쪽
○ 홍성복 외(2020), 미적분, 150-155쪽, 164-165쪽

[논제 1 평가기준]

- $\int_0^2 g(s)ds = 1$ 임을 제시 또는 $\int_0^1 f(s)ds = 1$임을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]

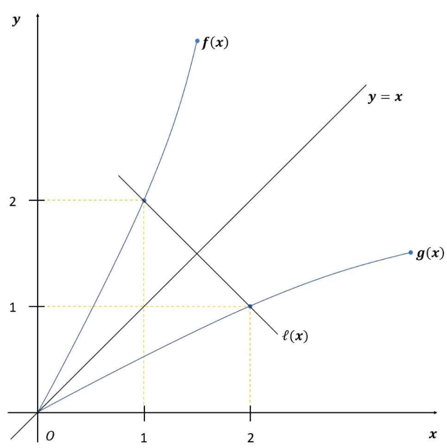
- $h(x)$를 제시 : 10점
- $g(3) = 2$를 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

조건 (2)에 의하여 함수 $f(x)$는 증가함수이고, $k(x) = x - f(x)$ 라고 하면 $k'(x) = 1 - f'(x) < 0$이므로 $k(x)$는 감소함수이다.
따라서 $x > 0$에서

$$x < f(x) \qquad \text{---------} \ (\star)$$

이다.
곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$의 위치는 오른쪽 그림과 같다.



두 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$와 $\mathrm{Q}(f(t), t)$를 지나는 직선의 방정식은 $\ell(x) = -x + t + f(t)$이므로

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t (f(s) - g(s))ds + \int_t^{f(t)} (\ell(s) - g(s))ds \qquad \text{------- } (**) \\ &= \int_0^t f(s)ds - \int_0^{f(t)} g(s)ds - \frac{1}{2}((f(t))^2 - t^2) + tf(t) - t^2 + (f(t))^2 - tf(t) \\ &= \int_0^t f(s)ds - \int_0^{f(t)} g(s)ds + \frac{1}{2}((f(t))^2 - t^2) \end{aligned}$$

이다. 또한 $u = g(s)$라 치환하면 $ds = f'(u)du$이고 부분적분법에 의하여

$$\int_0^{f(t)} g(s)ds = \int_0^t uf'(u)du = tf(t) - \int_0^t f(u)du \qquad \text{------- } (***)$$

이다.

[논제 1] (**)로 부터

$$\begin{aligned} A(1) &= \int_0^1 f(s)ds - \int_0^{f(1)} g(s)ds + \frac{1}{2}((f(1))^2 - 1) \qquad \text{--------- } (1.1) \\ &= \int_0^1 f(s)ds - \int_0^{f(1)} g(s)ds + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이다. 이제 $\int_0^1 f(s)ds$와 $\int_0^{f(1)} g(s)ds$를 계산하자. 먼저 $g(2) = 1$이므로 부분적분법에 의하여

$$1 = \int_0^2 sg'(s)ds = 2g(2) - \int_0^2 g(s)ds = 2 - \int_0^2 g(s)ds$$

즉

$$\int_0^{f(1)} g(s)ds = \int_0^2 g(s)ds = 1 \qquad \text{--------- } (1.2)$$

이다. 또한 (***)로 부터

$$1 = \int_0^{f(1)} g(s)ds = f(1) - \int_0^1 f(u)du$$

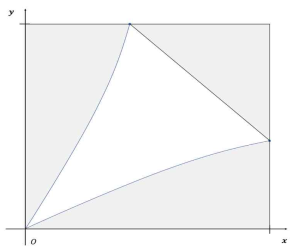
이고 $f(1) = 2$이므로

$$\int_0^1 f(u)du = 1 \qquad \text{-------------- } (1.3)$$

이다. (1.2)와 (1.3)를 (1.1)에 대입하면 $A(1) = \dfrac{3}{2}$이다.

(별해) $\int_0^2 g(s)ds = 1$이고 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대칭이므로

$$\begin{aligned} A(1) &= (\text{사각형의 넓이}) - 2\int_0^2 g(s)ds - (\text{삼각형의 넓이}) \\ &= 4 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



[논제 2] $h(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하자. 삼차함수 $h(x)$가 $x=1,2$에서 극값을 가지므로

$$h'(x)=3a(x-1)(x-2)=3a(x^2-3x+2)$$

양변을 적분하면

$$h(x)=3a\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right)+C \qquad (C\text{는 적분상수})$$

이다. 조건 (4)에서 $h(x)$의 두 개의 극값 중 하나는 0이므로

$$h(1)=\frac{5}{2}a+C=0 \quad \text{또는} \quad h(2)=2a+C=0 \qquad \text{---------- (2.1)}$$

이다. 조건 (5)로부터

$$\frac{3}{2}=\int_0^3 h(x)dx=\int_0^3\left(ax^3-\frac{9}{2}ax^2+6ax+C\right)dx=\frac{27}{4}a+3C$$

이고 (2.1)에 대입하면 $a=2,\ -2$이다. $a>0$이므로 $a=2$이다. 따라서,

$$h(x)=2x^3-9x^2+12x-4$$

이다. 문제의 조건 $A(2)=2\int_0^2 f(s)ds-\frac{7}{2}$과 (**)로 부터

$$\int_0^2 f(s)ds-\int_0^{f(2)} g(s)ds+\frac{1}{2}((f(2))^2-4)=2\int_0^2 f(s)ds-\frac{7}{2}$$

이다. 여기서 (***)로 부터 $\int_0^{f(2)} g(s)ds=2f(2)-\int_0^2 f(s)ds$ 이므로

$$2\int_0^2 f(s)ds-2f(2)+\frac{1}{2}((f(2))^2-4)=2\int_0^2 f(s)ds-\frac{7}{2}$$

에서 $f(2)=1,3$를 얻는다. 그런데, (*)에 의하여 $f(2)=3$ 이고, 즉, $g(3)=2$이다.
그러므로 $\{g(x)\,|\,0\le x\le 3\}=[0,2]$이다.

아래 그림과 같이 $0\le t\le 2$ 에서 방정식 $h(t)=\frac{1}{2}$의 해는 2개이고 $g:[0,3]\to[0,2]$는 일대일대응이므로 $0\le x\le 3$에서 곡선 $y=h(g(x))$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수는 2이다.